

Euklidinen topologia
Loppukoe 2.4.2012

1. Määritä joukon

$$A = \left\{1 - \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\right\}$$

supremum ja infimum. Perustele vastauksesi.

2. (a) Määrittele joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sisäpiste.

(b) Oletetaan, että (x_k) on \mathbb{R}^n :n jono, joka suppenee kohti \mathbb{R}^n :n pistettä x ja (y_k) on \mathbb{R}^n :n jono, joka suppenee kohti \mathbb{R}^n :n pistettä y . Osoita, että jono $(x_k + y_k)$ suppenee kohti pistettä $x + y$.

3. Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (x, 2z)$$

on jatkuva.

4. Oletetaan, että $x_1 > 0$ ja

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{1 + x_k} \text{ kun } k = 1, 2, \dots$$

(a) Osoita, että jono (x_k) on alhaalta rajoitettu.

(b) Osoita, että jono (x_k) on vähenevä.

(c) Osoita, että jono (x_k) suppenee ja laske sen raja-arvo.

5. Tarkastellaan joukkoa

$$E = \left\{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\right\}.$$

(a) Onko 0 joukon E kasautumispiste?

(b) Onko reaaliluku $x \neq 0$ joukon E kasautumispiste?