Euklidinen topologia

Tentti 7.3.2011

Koeaika on neljä tuntia.

1. Määritä tarkasti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

2. Olkoot $d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$d_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}^2,$$

ja $d_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}^2,$$

metriikoita joukossa $\mathbb{R}^2$. Piirrä joukko

$$B_{d_1}((1, 0), 1) \cap \overline{B}_{d_2}((1, 1), 1),$$

missä alaindeksit d_1 ja d_2 kertovat, mitä metriikkaa käyttäen pallot on määritelty.

3. Määritä tarkasti perustellen joukon $A = [0, \infty[\times\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ reuna.

4. a) Määrittele Cauchy-jono.
b) Oletetaan, että $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on jono joukossa $\mathbb{R}^n$ ja että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että $\lim_{n\to\infty} ax_n = ax$.

5. Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ kuvaus, $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $a \in A$ joukon A sisäpiste. Osoita, että jos $f : A \to \mathbb{R}^k$ on jatkuva pisteessä a, niin $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ on jatkuva pisteessä a.

Tehtävä L on lisätehtävä, jonka ratkaisusta voit saada korkeintaan 6 lisäpistettä.

L. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen, jos ei ole olemassa sellaisia avoimia joukkoja $U, V \subset \mathbb{R}^n$, että $U \cap V = \emptyset$, $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$ ja $A = (U \cap A) \cup (V \cap A)$. Anna esimerkki joukosta $A \subset \mathbb{R}^2$, joka ei ole yhtenäinen. Osoita, että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on yhtenäinen ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ on jatkuva, niin $f(A)$ on yhtenäinen.