Euklidinen topologia

Tentti 11.4.2011

Koeaika on neljä tuntia.

1. Määritä tarkasti perustellen $\sup A$ ja $\inf A$, kun

$$A = \{-1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

2. Määritä tarkasti perustellen joukon $A = \mathbb{R} \times]\infty, 0[\cup \{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ reuna.

3. a) Määrittele joukon kasautumispiste.
b) Olkoot $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jonoja avaruudessa $\mathbb{R}^m$. Oletetaan, että $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Osoita, että $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

4. Olkoot $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ kuvaus, $A \subset \mathbb{R}^n$ suljettu ja $a \in A$. Jos kuvaus $f : A \to \mathbb{R}^k$ on jatkuva pisteessä a, niin onko kuvaus $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ jatkuva pisteessä a?

5. Olkoon $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|, & \text{jos } x = \lambda y \text{ jollekin } \lambda \in \mathbb{R}, \\ \|x\| + \|y\| & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä $\|x - y\|$ on pisteiden $x, y \in \mathbb{R}^2$ etäisyys euklidisessa metriikassa. Osoita, että d on metriikka joukossa $\mathbb{R}^2$. Piirrä $\overline{B}_d((1,0), \frac{3}{2})$. Metristä avaruutta $(\mathbb{R}^2, d)$ kutsutaan Ranskan rautatieavaruudeksi, koska kaikki junareitit kulkevat Pariisin kautta.

Tehtävä L on lisätehtävä, jonka ratkaisusta voit saada korkeintaan 6 lisäpistettä.

L. Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on polkuyhtenäinen, jos kaikilla $x, y \in A$ on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $\gamma : [0,1] \to A$, että $\gamma(0) = x$ ja $\gamma(1) = y$. Anna esimerkit joukoista $A, B \subset \mathbb{R}^2$, joille A on polkuyhtenäinen ja B ei ole polkuyhtenäinen. Osoita, että jos $A \subset \mathbb{R}^n$ on polkuyhtenäinen ja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ on jatkuva, niin $f(A)$ on polkuyhtenäinen.