

**Euklidinen topologia**  
**Loppukoe 12.3.2012**

1. Määritä joukon

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots \right\}$$

supremum ja infimum. Perustele vastauksesi.

2. (a) Määrittele joukon  $A \subset \mathbb{R}^n$  reunapiste.

(b) Oletetaan, että  $(x_k)$  on  $\mathbb{R}^n$ :n jono, joka suppenee kohti  $\mathbb{R}^n$ :n pistettä  $x$ . Olkoon  $a \in \mathbb{R}$ . Osoita, että jono  $(ax_k)$  suppenee kohti pistettä  $ax$ .

3. (a) Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = (2x, y)$$

on jatkuva.

(b) Onko kuvauksella  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

raja-arvoa pisteessä  $(0, 0)$ ?

4. Oletetaan, että  $x_1 > 0$  ja

$$x_{k+1} = \frac{2x_k}{4 + x_k} \text{ kun } k = 1, 2, \dots$$

(a) Osoita, että  $(x_k)$  on alhaalta rajoitettu.

(b) Osoita, että  $(x_k)$  on vähenevä.

(c) Osoita, että  $(x_k)$  suppenee ja laske sen raja-arvo.

5. (a) Oletetaan, että  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on jatkuva kuvaus ja  $A \subset \mathbb{R}^n$  on rajoitettu. Onko joukko  $f(A)$  rajoitettu? Perustele vastauksesi.

(b) Oletetaan, että  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  on jatkuva kuvaus ja  $U \subset \mathbb{R}^m$  on avoin. Onko joukko

$$B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in U\}$$

avoin?