Funktionaalianalyysi, 10.1.2011

1. Määrittele:

   (a) refleksiivinen normiavaruus.

   (b) kompakti operaattori.

   (c) operaattorin transpoosi.

Formuloi seuraavat lauseet:

   (d) Hahn-Banachin lause normiavaruuksille.

   (e) avoimen kuvauksen lause.

   (f) suljetun kuvaajan lause.

2. Formuloi ja todista Banachin kiintopistelause.

3. (a) Olkoot X normiavaruus ja A,B $\subset X$ osajoukkoja siten, että A on suljettu avaruudessa X ja B on kompakti avaruudessa X. Osoita, että summajoukko $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ on suljettu avaruudessa X.

(b) Olkoot $e_n = (0, ...0, 1, 0, ...) \in l^2$ kun $n \in \mathbb{Z}_+$, ja $A = \{e_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ sekä $B = \{-e_n + \frac{1}{n}e_1 : n \in \mathbb{Z}_+\}$. Osoita, että A ja B ovat avaruuden l^2 suljettuja ja rajoitettuja joukkoja, mutta että $A + B$ ei ole suljettu avaruudessa l^2.

4. (a) Olkoon $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} : f \text{ jatkuva}\}$ normina sup-normi $||f||_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$. Määritellään kuvaus $T : C[0,1] \to C[0,1]$ kaavalla $Tf(t) = t^2 f(t)$ kun $f \in C[0,1]$ ja $t \in [0,1]$. Osoita, että T on jatkuva lineaarikuvaus ja määritä sen normi $||T||$.

(b) Olkoon $I : C[0,1] \to C[0,1]$ identiteettioperaattori. Osoita, että $||I + T|| = 1 + ||T||$.

5. Olkoon $T \in L(l^2)$ määritelty kaavalla $T(x) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, ...)$, missä $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in l^2$.

(a) Määrää $T^* \in L(l^2)$.

(b) Määrää $(T^*)^2$ ja osoita, että jos $|\alpha| < 4$ niin α on kuvauksen $(T^*)^2$ ominaisarvo.

(c) Osoita, että $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 2\}$.