Funktionaalianalyysi, 23.2.2009

1. Formuloi ja todista Banachin kiintopistelause.

2. Olkoon $1 \leq p < \infty$ ja kiinnitetään rajoitettu jono $(a_k)_{k=1}^{\infty} \in l^{\infty}$. Näytä, että kuvaus $Tx = T(x_k)_{k=1}^{\infty} = (a_k x_k)_{k=1}^{\infty}$, kun $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$, määrittelee rajoitetun lineaarisen operaattorin $l^p \to l^p$. Laske sen normi $||T||$.

3. Olkoot $L, R \in L(l^2, l^2)$,

$$R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots) \text{ ja}$$

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

(i) Onko L normaali?

(ii) Osoita, että jokainen $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$, on R:n ominaisarvo.

(iii) Osoita, että $\sigma(R) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

(iv) Osoita, että operaattorilla L ei ole lainkaan ominaisarvoja, mutta $\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$.

4. Olkoot H Hilbertin avaruus ja $U \in L(H)$ unitaari. Osoita, että lineaarinen kuvaus f: L(H) $\to L(H)$, f(T) = U*TU, on isometrinen.

5. Olkoot $-\infty < a < b < \infty$ ja $k \in C([a, b] \times [a, b])$. Määritellään integraalioperaattori $T : C([a, b]) \to C([a, b])$ kaavalla

$$(Tf)(t) = \int_a^b k(s, t) f(s) ds.$$

Osoita, että T on kompakti operaattori.