Funktionaalianalyysi, 26.1.2009

1. Määrittele:

   (a) refleksiivinen normiavaruus.

   (b) kompakti operaattori.

   (c) operaattorin spektri.

Formuloi seuraavat lauseet:

   (d) tasaisen rajoituksen periaate.

   (e) avoimen kuvauksen lause.

   (f) suljetun kuvaajan lause.

2. Formuloi Hahn-Banachin lause normiavaruuksille. Todista tämän tuloksen avulla, että

$$||x|| = \sup\{|\langle x, f\rangle| : f \in X^*,\ ||f|| \leq 1\}, \quad x \in X,$$

missä X on normiavaruus ja X^* sen duaali.

3. Olkoon $C[0,1]$ varustettuna normilla $||f||_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$. Annetaan lineaarinen operaattori $A : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$(Af)(t) = \int_0^t e^{t-s} f(s) ds.$$

   (a) Näytä, että A on rajoitettu ja määrä sen normi $||A||$.

   (b) Osoita, että A on injektio. Onko se surjektio? Perustele!

4. Olkoot H Hilbertin avaruus ja $U \in L(H)$ unitaari. Osoita, että lineaarinen kuvaus f: L(H) $\to L(H)$, f(T) = U*TU, on isometrinen.

5. Olkoon $C[0,1]$ varustettuna normilla $||f||_\infty = \max_{0\leq t\leq 1} |f(t)|$. Määritellään lineaarinen operaattori $T : C[0,1] \to C[0,1]$ kaavalla

$$(Tf)(t) = tf(t) \quad f \in C[0,1], t \in [0,1].$$

   (a) Määrää operaattorin T ominaisarvot.

   (b) Määrää lisäksi $\sigma(T)$.