

Hilbertin avaruuden operaattorit

Kesätentti 20.6.2005 (J. Berkovits)

H on kompleksikertoiminen Hilbertin avaruus kaikissa tehtävissä.

1. Olkoon $M \subset H$ lineaarinen aliavaruus. Osoita, että M on suljettu jos ja vain jos se on täydellinen.
2. Olkoon $T \in B(H)$. Osoita, että T on normaali jos ja vain jos $\|Tx\| = \|T^*x\| \forall x \in H$.

3. Määritellään siirto-operaattorit $S_L : l_2 \rightarrow l_2$ ja $S_R : l_2 \rightarrow l_2$ asettamalla

$$S_L x = (x_2, x_3, \dots) \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$$

ja

$$S_R x = (0, x_1, x_2, \dots) \quad \forall x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2.$$

Määrää siirto-operaattorien ominaisarvot.

4. Olkoo $T \in B(H)$. Osoita, että $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$.
5. Olkoon $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ lineaarinen ja tiheästi määritelty.
 - a) Määrittele T^* .
 - b) Osoita, että T^* on suljettu.