

Hilbert-avaruuksien operaattorit

Kesätentti 21.6.2004

1. Olkoon H separoituva Hilbertin avaruus ja $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sen ortonormaali kanta. Määritellään

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \langle x, e_n \rangle e_n$$

aina, kun $x \in H$.

Osoita, että $T \in B(H)$ ja laske $\|T\|$.

2. Osoita, että tehtävän 1. operaattori T on kompakti.

3. Olkoon H Hilbertin avaruus ja $T \in B(H)$ itseadjungoitu. Osoita, että

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|.$$

4. Olkoon H kompleksinen Hilbertin avaruus ja $S(H) = \{T \in B(H) | T \text{ kääntyvä}\}$. Osoita, että $S(H)$ on avoin joukossa $B(H)$.

5. Olkoon H Hilbertin avaruus ja $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ tiheästi määritelty lineaarinen operaattori. Osoita, että T^* on suljettu.