Hilbert-avaruuksien operaattorit

Loppukoe 10.5.2004

HUOM1 Tehtävät 1-4 PÄÄTTÖKOE.

HUOM2 H on kompleksikertoiminen separoituva ääretönulotteinen Hilbert-avaruus, ellei toisin mainita.

1. Olkoot V ja M H:n lineaarisia aliavaruuksia.
   Osoita, että $(V+M)^\perp = V^\perp \cap M^\perp$.

2. Olkoon $T \in B(H)$ kompakti. Osoita, että T^* on kompakti.

3. a) Olkoon $T : D(T) \subset H \to H$ lineaarinen ja suljettu. Olkoon $Y = D(T)$ ja $||u||_Y^2 = ||u||^2 + ||Tu||^2 \ \forall \ u \in Y$. Osoita, että avaruus $(Y, ||\cdot||_Y)$ on täydellinen.

   b) Olkoon $T : D(T) \subset H \to H$ lineaarinen, tiheästi määritelty ja suljettu. Osoita, että T^* on suljettu.

4. Olkoon $T : D(T) \subset H \to H$ ja $S : D(S) \subset H \to H$ lineaarisia, tiheästi määriteltyjä ja suljettuja. Oletetaan, että

$$D(ST) = \{u \in D(T) | Tu \in D(S)\}$$

   on tiheä avaruudessa H. Osoita, että $(ST)^*$ on kuvauksen T^*S^* laajennus.

5. (Loppukoetehtävä)
   Olkoon $T \in B(H)$ itseadjungoitu ja oletetaan, että on olemassa sellainen $x_0 \in H$, että $||x_0|| = 1$ ja

$$\langle Tx_0, x_0 \rangle = \inf_{||x||=1} \langle Tx, x \rangle \overset{merk.}{=} \lambda.$$

   Osoita, että λ on ominaisarvo ja x_0 vastaava ominaisvektori ts. $Tx_0 = \lambda x_0$.