Hilbertin avaruudet, loppukoe 8.8.2011

1. Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $p \in [1, \infty)$.
   a) Määrittele avaruus $L^p(E)$ ja sen normi.
   b) Millä luvun p arvoilla $L^p(E)$ on Hilbertin avaruus? (Pelkkä vastaus riittää.)
   c) Olkoon $E = (0, \infty)$ ja $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Millä luvun p arvoilla $f \in L^p(E)$?

2. Olkoon S sisätuloavaruuden $(H, (\cdot|\cdot))$ osajoukko.
   a) Määrittele joukon S ortogonaalinen komplementti $S^\perp$.
   b) Olkoon $S = \{(2, -2, 0), (0, 0, 1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Määrää $S^\perp$ ja $(S^\perp)^\perp$.

3. Olkoon $(H, (\cdot|\cdot))$ sisätuloavaruus.
   a) Määrittele sisätulonormi ja esitä Cauchy-Schwarzin epäyhtälö (ilman todistuksia).
   b) Olkoot $(x_n)_{n=1}^\infty$ ja $(y_n)_{n=1}^\infty$ avaruuden H suppenevia jonoja. Osoita, että jos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ja $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, niin $\lim_{n\to\infty}(x_n|y_n) = (x|y)$.

4. Olkoon $1 < q < p$ ja $f \in L^p(E)$, missä $E \subseteq \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $m(E) < \infty$. Osoita, että $f \in L^q(E)$ ja

$$\|f\|_q \leq m(E)^{\frac{p-q}{pq}} \|f\|_p.$$

5. Olkoon $(f_n)_{n=1}^\infty$ totaali, ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa $L^2([a,b])$. Osoita, että kaikilla $x \in [a,b]$ pätee

$$x - a = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_a^x \overline{f_n(t)}\, \mathrm{d}t \right|^2.$$