802652S HILBERTIN AVARUUDET 14.5.2012

1. (a) Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $1 \le p < \infty$. Määrittele avaruus $L^p(E)$ ja sen normi.

(b) Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko, jolle $m(E) < \infty$. Näytä, että jos $1 \le q < p < \infty$, niin $L^p(E) \subseteq L^q(E)$.

(c) Olkoon $E = (0,\infty)$ ja $f(x) = (1+x)^{-1/2}$. Millä luvun p arvoilla $f \in L^p(E)$?

2. Esitä ja todista Fréchet-Rieszin lause.

3. Hilbertin avaruuksissa on voimassa ns. Miniminormilause. Se kuuluu näin:

Olkoon $\emptyset \neq S$ Hilbertin avaruuden H suljettu konveksi osajoukko ja $x \in H$ kiinteä. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi $y_0 \in S$, jolle

$$\|x - y_0\| = \inf\{\|x-y\| \,;\, y \in S\}.$$

Näytä vastaesimerkeillä, että Miniminormilause ei ole voimassa seuraavilla oletuksilla:

(a) H on Hilbertin avaruus ja $\emptyset \neq S$ on konveksi, mutta ei ole suljettu.

(b) H on Hilbertin avaruus ja $\emptyset \neq S$ on suljettu, mutta ei ole konveksi.

(c) H on Banachin avaruus ja $\emptyset \neq S$ on suljettu ja konveksi.

4. Olkoot $M = \{f \in L^2([-1,1]) \,;\, f \text{ on pariton}\}$ ja $N = \{g \in L^2([-1,1]) \,;\, g \text{ on parillinen}\}$. Näytä, että avaruus $L^2([-1,1])$ on aliavaruuksien M ja N ortogonaalinen suora summa.

5. Olkoon $\left(x^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ avaruuden ℓ^2 alkioiden

$$x^{(n)} = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots\right)$$

muodostama rajoitettu jono (eli on olemassa sellainen vakio $M > 0$, että $\|x^{(n)}\| \le M$ kaikilla n). Oletaan lisäksi, että jokaisella kiinteällä k pätee

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = 0.$$

Näytä, että jokaisella kiinteällä $y \in \ell^2$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \left(x^{(n)} \,\middle|\, y\right) = 0.$$