802652S HILBERT-AVARUUDET 21.5.2012

1. (a) Olkoon X normiavaruus, jonka skalaarikunta on $\mathbb{K}$. Määrittele duaaliavaruus X^* ja duaaliavaruuden normi.

   (b) Olkoon H sisätuloavaruus ja $x \in H$. Osoita, että

$$\|x\| = \sup\{|(x \mid y)|\,;\, y \in H \text{ ja } \|y\| = 1\}.$$

   (c) Olkoon $E \subseteq \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $1 \leq p < \infty$. Määrittele avaruus $L^p(E)$ ja sen normi.

2. Tunnetusti $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ on Banach-avaruus, missä

$$\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \sup\{|x_k|\,;\, k = 1, \dots, n\}.$$

   Määritä kaikki sellaiset luvut n, joilla $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ on myös Hilbert-avaruus (eli normi $\|\cdot\|_\infty$ on jonkin sisätulon indusoima). Muista perustelut!

3. Esitä ja todista Miniminormilause.

4. Olkoot $M = \{f \in L^2([-1,1])\,;\, f \text{ on pariton}\}$ ja $N = \{g \in L^2([-1,1])\,;\, g \text{ on parillinen}\}$. Näytä, että avaruus $L^2([-1,1])$ on aliavaruuksien M ja N ortogonaalinen suora summa.

5. Olkoot $1 \leq q < p < \infty$ ja $f \in L^p(E)$, missä $E \subseteq \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $m(E) < \infty$. Osoita, että $f \in L^q(E)$ ja

$$\|f\|_q \leq m(E)^{\frac{p-q}{pq}} \|f\|_p.$$