

802360A Inversio-ongelmien peruskurssin koe 29.11. 2010

1. a) Olkoon  $A = UDV^T$  matriisin  $A \in \mathbf{R}^{4 \times 4}$  singulaariarvohajotelma, missä

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Mikä on matriisin  $A$  ehtoluku?

b) Valitse luku  $b \in \mathbf{R}$  siten, että ongelma "Määää  $x \in \mathbf{R}^2$  kun  $y = Mx \in \mathbf{R}^2$  on annettu" on hyvin asetettu, kun

$$M = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. a) Selitä mitä tarkoitetaan Tikhonovin regularisaatiolla.

b) Määää pienimmän neliösumman menetelmällä yhtälön  $y = Ax$  ratkaisu, kun

$$y = (1, 2, 0) \text{ ja } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Olkoon  $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$  jatkuva kuvaus. Määää tuntematonta mallintavan satunnaisvektorin  $X$  priori- ja posterioritodennäköisyystiheysfunktiot, kun tuntemattomasta  $x_0 \in \mathbf{R}^n$  on annettu data  $y_0 = F(x_0) + \epsilon_0$ , jota mallinetaan näytteenä satunnaisvektorista  $Y = F(X) + \epsilon$  ja  $f_Y(y|X = x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^m}} e^{-\frac{1}{2}|y-F(x)|^2}$  kun  $y \in \mathbf{R}^m$  sekä  $X \sim N(0, C_X)$  missä  $C_X \in \mathbf{R}^{n \times n}$  on symmetrinen matriisi jonka ominaisarvot ovat positiivisia.

4. Olkoon tuntemattoman posterioritodennäköisyystiheysfunktio

$$f_{post}(x) = c \exp^{-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}y_0)^T C_{post}^{-1}(x-\frac{1}{2}y_0)}, \quad x \in \mathbf{R}^2$$

missä  $C_{post} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ja  $c$  on normitusvakio. Määää tuntemattoman maksimi a posteriori (MAP) -estimaatti ja posterioriodotusarvo kun data  $y_0 = (2, 0)$  on annettu.