802360A Inversio-ongelmien peruskurssin tentti 28.11. 2011

1. a) Mitä tarkoitetaan hyvin asetetulla ongelmalla?

   b) Olkoon $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tutki, onko seuraava ongelma hyvin asetettu.

   "Määrää $x \in \mathbf{R}^2$ siten että $y = Mx$ missä $y \in \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3 : y_1 = y_3\}$ on annettu"

2. Olkoon
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

   a) Laske matriisin M ehtoluku.

   b) Olkoon $y + \delta y = M(x + \delta x)$ ja $y = Mx$, missä $y, \delta y, x, \delta x \in \mathbf{R}^3$. Kuinka suuri $\|\delta x\|$ voi korkeintaan olla, kun $\|x\| \leq 1$ ja $\|\delta y\| \leq \frac{1}{100}\|y\|$?

3. Tuntemattomasta suureesta $x' \in \mathbf{R}^2$ on saatu häiriöinen mittaus. $y = Mx' + e$, missä $y = (0, 2, 2, 0)$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ ja $e \in \mathbf{R}^4$ on tuntematon häiriö. Määrää likimääräisratkaisu $\hat{x} \in \mathbf{R}^2$, jolle pätee $\|y - M\hat{x}\|^2 = \min_{x \in \mathbf{R}^2} \|y - Mx\|^2$.

4. Määrää yhtälön $y = Mx$ likimääräisratkaisu Tikhonovin regularisaatiolla, kun $y = (0, 1)$ ja $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Voit käytää parametrille α arvoa 2.

5. a) Selitä, mitä tarkoitetaan tietokonetomografiakuvauksella. Voit käyttää apuna Beerin ja Lambertin lakia
$$\ln\left(\frac{I_1}{I_0}\right) = -\sqrt{a^2 + 1} \int_{-r}^{r} f(x, ax + b)dx.$$

   b) Selitä, miten integraaliyhtälöistä päädytään matriisiyhtälöihin tietokonetomografiassa?