**802360A Inversio-ongelmien peruskurssin tentti 30.01. 2012**

1. a) Olkoon $A = UDV^T$ matriisin $A \in \mathbf{R}^{4\times 4}$ singulaariarvohajotelma, missä

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-3} \end{pmatrix}.$$

Mikä on matriisin $A$ ehtoluku?

b) Millä luvun $b \in \mathbf{R}$ arvoilla ongelma

*"Määrää $x \in \mathbf{R}^2$ siten että $y = Mx$, kun $y \in \mathbf{R}^2$ on annettu"*

on hyvin asetettu, kun $M = \begin{pmatrix} b^2 & b \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Olkoon

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Määrää yhtälön $y = Mx$ pienimmän neliösumman ratkaisu $\hat{x}$, kun $y = (1, 0, 1)$. Onko pienimmän neliösumman ratkaisu $\hat{x}$ yksikäsitteinen?

3. Laske

$$\hat{x}_\alpha = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbf{R}^2} \|Ax - y\|^2 + \alpha\|x\|^2$$

kun $y = (1, 0)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ja $\alpha = 1$.

4. Olkoon $X$ tuntematonta mallintava satunnaisvektori, jonka todennäköisyystiheysfunktio on

$$f_X(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\right).$$

Olkoon $\varepsilon$ häiriötä mallintava satunnaisvektori, jonka todennäköisyystiheysfunktio on

$$f_\varepsilon(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3\delta^3}} \exp\left(-\frac{1}{2\delta}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)\right),$$

missä $\delta > 0$. Olkoon $\varepsilon$ riippumaton satunnaisvektorista $X$, $M \in \mathbf{R}^{3\times 3}$ ja $Y = MX + \varepsilon$.

a) Mikä on tuntemattoman posterioritodennäköisyystiheysfunktio kun satunnaisvektorista $Y$ on annettu näyte $y_0 \in \mathbf{R}^3$ (jolla $f_Y(y_0) \neq 0$)?

b) Mikä on tuntemattoman maksimi a posteriori-estimaatti $\hat{x}_{MAP}$?