802360A Inversio-ongelmien peruskurssin koe 31.1. 2011

1. a) Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tutki kumpi seuraavista ongelmista on hyvin asetettu ja kumpi on huonosti asetettu.

(i) Määrää $x \in \mathbf{R}^3$ kun $y = Ax \in \mathbf{R}^4$ on annettu.

(ii) Määrää $x \in \mathbf{R}^3$ kun $y = Ax \in Y$ on annettu, missä

$$Y = \{y \in \mathbf{R}^3 : \text{On olemassa } x \in \mathbf{R}^3 \text{ jolla } y = Ax\}.$$

b) Määrää a)-kohdan huonosti asetetulle ongelmalle likimääräisratkaisu pienimmän neliösumman menetelmällä kun $y = (2, 1, 2, 1)$.

2. Olkoon $n \geq 2$.

a) Määrittele, mikä on säännöllisen matriisin $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ehtoluku.

b) Symmetrisen ja säännöllisen matriisin $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ehtoluku on 30. Mikä on matriisin $A^2 = AA$ ehtoluku?

3. Tarkastellaan tietokonetomografiakuvausta. Olkoon $\phi = \sum_{i=1}^{20} x_i \phi_i$ tuntematonta massa-absorptiokerrointa mallintava funktio, missä $x = (x_1, ..., x_{20}) \in \mathbf{R}^{20}$ on tuntematon vektori ja funktiot $\phi_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $i = 1, ..., 20$, ovat tunnettuja jatkuvia funktioita, jotka häviävät origokeskisen yksikkökiekon ulkopuolella.

a) Määrää tietokonetomografiakuvauksen matriisi A, kun mittaussuoria on 10 kappaletta, kaikki mittaussuorat kulkevat origon kautta ja mittaussuorien kulmakertoimet ovat $b_j = j/5$ missä $j = 1, ..., 10$.

b) Selitä, miten tuntematonta massa-absorptiokerrointa esittävä likimääräisratkaisu määrättäisiin käyttämällä Tikhonovin regularisaatiota. Voit olettaa, että annettu data on muotoa $y = Ax + \epsilon$, missä $\epsilon \in \mathbf{R}^{10}$ edustaa mittausvirhettä.

4. Olkoon $n, m \geq 2$. Olkoon tuntematonta mallintava satunnaisvektori $X \sim N(0, C)$, missä C on reaalinen symmetrinen $n \times n$-matriisi, jonka ominaisoarvot ovat positiivisia. Olkoon häiriötä mallintava satunnaisvektori $\varepsilon \sim N(0, \delta I)$, missä $\delta > 0$ ja I on identtinen $m \times m$-matriisi. Oletetaan, että ε on riippumaton satunnaisvektorista X. Olkoon $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Olkoon $Y = AX + \varepsilon$ ja satunnaisvektorista Y on annettu näyte $y_0 \in \mathbf{R}^m$.

a) Mikä on tuntemattoman posterioritodennäköisyystiheysfunktio?

b) Mikä on tuntemattoman maksimi a posteriori-estimaatti $\hat{x}_{MAP}$?