

Jatkuvuus ja raja-arvo
Loppukoe 26.11.2012

1. (a) Osoita määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{1}{2}x - 2\right) = -3.$$

(b) Laske

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{x - 3}}.$$

2. (a) Oletetaan, että kuvaukset $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus $f+g$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$.

(b) Laske

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n).$$

3. (a) Oletetaan, että lukujono (x_n) suppenee ja lukujono (y_n) hajaantuu. Osoita, että summajono $x_n + y_n$ hajaantuu.

(b) Oletetaan, että on olemassa sellainen $a \in \mathbb{R}$, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Osoita, että

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

4. Oletetaan, että kuvaukset $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Oletetaan lisäksi, että $g(0) > f(0)$ ja $g(1) < f(1)$. Osoita, että on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}$, että $f(x_0) = g(x_0)$.