

Jatkuvuus ja raja-arvo
Loppukoe 29.10.2012

1. (a) Osoita määritelmää käyttäen, että kuvaus

$$f(x) = 2x - 5$$

on jatkuva pisteessä 1.

- (b) Laske

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right).$$

2. (a) Olotetaan, että $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ja $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Osoita määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b.$$

- (b) Laske

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x).$$

3. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perustele vastauksesi.

- (a) Hajaantuva lukujono ei ole rajoitettu.
(b) Jos lukujono (x_n) suppenee ja lukujono (y_n) hajaantuu, niin lukujono $(x_n y_n)$ hajaantuu.
(c) Jos $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, niin f on jatkuva pisteessä 0.

4. (a) Osoita, että kuvaus $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

saavuttaa suurimman arvonsa.

- (b) Olotetaan, että $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva funktio ja $0 < f(x) < 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoita, että on olemassa sellainen $x_0 \in \mathbb{R}$, että $f(x_0) = x_0$.