Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitos/tilastotiede

JOHDATUS BAYESILÄISEEN TILASTOTIETEESEEN, kl 2011 (Esa Läärä)

Loppukuulustelu, ma 17.10. klo 14-18 L1

Merkitse vastauspaperiin selvästi, suoritatko kurssin aineopintoihin vai syventäviin opintoihin. VASTAA VIITEEN (5) KYSYMYKSEEN. Tehtävä 1 sisältyy vain aineopintotason tenttiin, kun taas tehtävä 6 vaaditaan vain syventävien opintojen kuulusteluun. Osa muiden tehtävien alakohdista sisältyy vain syventävänä suoritettavaan tenttiin.

Mukana saa olla laskin mutta ei omia muistiinpanoja eikä muutakaan kirjallista materiaalia. Tarvittavat taulukot jaetaan tehtäväpaperin mukana.

1. *Vain aineopintoihin.* Huonoennusteiseen leukemiaan sairastuneiden potilaiden ryhmän ($n = 16$) elinajat (viikkoina) diagnoosin jälkeen olivat

2 3 3 3 4 4 4 7 8 16 17 22 30 43 56 65

Elinaikojen keskiarvo oli $\bar{y} = 17.94$ viikkoa $= 0.35$ vuotta.

Oletetaan elinaikojen $y_1, \ldots, y_n$ olevan toisistaan ehdollisesti riippumattomia ehdolla λ, jossa $y_i \mid \lambda \sim \text{Exp}(\lambda)$, jok. $i = 1, \ldots, n$, ja $\lambda > 0$. Priorijakaumaksi λ:lle oletetaan Gamma(α, β), jonka molemmat parametrit ovat positiivisia.

(a) Osoita, että gammajakauma on eksponenttijakauman konjugaattijakauma.

(b) Osoita, että parametrin λ posteriorijakaumalle pätee: $\lambda \mid y \sim \text{Gamma}(\alpha + n, \beta + t)$, jossa $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ja $t = \sum_{i=1}^{n} y_i$.

(c) Jos leukemiapotilaiden elinaikojen analyysissä prioriparametrien arvoiksi oletetaan $\alpha = 0.1$ (paljas luku) ja $\beta = 0.1$ vuotta, niin kuinka suuria ovat em. havaintojen pohjalta λ:n posteriorijakauman odotusarvo $\mathbb{E}(\lambda \mid y)$ ja varianssi $\text{var}(\lambda \mid y)$?

2. Narkolepsiaan sairastuneiden 5–19-vuotiaiden lasten ja nuorten lukumäärät Suomessa vuosijakson 2006–2010 aikana olivat vuosittain seuraavat:

vuosi	2006	2007	2008	2009	2010
lukumäärä	5	6	14	9	62

Lähde: Kansallisen narkolepsiatyöryhmän raportti, 2011 (`http://www.thl.fi/fi_FI/web/fi/rokotteet/narkolepsia_ja_sikainfluenssarokote`).

Narkolepsiatapausten lukumääristä Suomessa ei ole luotettavia tilastoja ennen vuotta 2006. Ruotsissa diagnosoitiin 2000-luvun puolivälistä alkaen vuosittain 7–16 uutta narkolepsiatapausta tässä ikäluokassa.

Merkitään y_i = ikäluokassa 15–19 vuotta ilmaantuneiden uusien narkolepsiatapausten lukumäärä Suomessa vuonna $i + 2005$; $i = 1, \ldots, 5$. Oletetaan, että havainnot $y_1, \ldots, y_5$ ovat toisistaan ehdollisesti riippumattomat siten, että $y_i \mid \theta_i \sim \text{Poisson}(\theta_i)$, jossa $\theta_i > 0$ jok. $i = 1, \ldots, 5$.

Seuraavalla sivulla on aineiston analyysiä varten laadittu Jags-skripti sekä sen pohjalta tehdyt simulaatioajot ja niiden tuloksia. Kerro tiiviisti mutta riittävän yksityiskohtaisesti, mikä on ollut analyysin kohde, millaisia malli-, priori- ym. oletuksia on tehty, ja mitkä ovat analyysin keskeiset tulokset.

```
write("
  model{
    for( i in 1:length(y) )
      {    y[i] ~ dpois(theta[i])
      theta[i] <- beta0 + beta1*(x[i]-mean(x)) }
      beta0 ~ dgamma(6, 1)
      beta1 ~ dnorm(0, 0.05)
      pb1 <- step(beta1)
      tt <- beta0 + beta1*2.5
      yt ~ dpois(tt)
  }
", "gampoislin.txt")

> library(rjags)
> y <- c(5, 6, 14, 9)
> x <- 2005 + 1:4
> gpl <- jags.model("gampoislin.txt", data = list(y = y, x = x))
> gpls <- coda.samples(gpl, c("beta0", "beta1", "pb1", "yt"), n.iter = 5000)

> summary(gpls)

Iterations = 1001:6000
Thinning interval = 1
Number of chains = 1
Sample size per chain = 5000

1. Empirical mean and standard deviation for each variable,
   plus standard error of the mean:

         Mean     SD Naive SE Time-series SE
beta0  8.1409 1.2526 0.017714       0.024495
beta1  1.8284 1.1748 0.016614       0.020255
pb1    0.9438 0.2303 0.003257       0.003687
yt    12.7160 4.9972 0.070672       0.075380

2. Quantiles for each variable:

         2.5%   25%    50%    75%  97.5%
beta0  5.8696 7.297  8.097  8.922 10.842
beta1 -0.4881 1.044  1.838  2.621  4.109
pb1    0.0000 1.000  1.000  1.000  1.000
yt     4.0000 9.000 12.000 16.000 23.000
```

3. Oletetaan nyt että neljänä ensimmäisenä vuonna 2006–2009 vuotuisten tapausmäärien odotusarvo oli samansuuruinen $\mu_0 = \theta_i$, $i = 1, \ldots, 4$ mutta vuoden 2010 odotusarvo $\mu_1 = \theta_5$ oli mahdollisesti erilainen. Analysoidaan odotusarvojen μ_1 ja μ_0 suhdetta $\rho = \mu_1/\mu_0$ normaalijakaumaan perustuvalla likimääräisellä menetelmällä. Tässä nojaudutaan siihen, että parametrin $\alpha = \log(\rho)$ suurimman uskottavuuden estimaattorin $\widehat{\alpha} = \log(\widehat{\rho})$ otantajakauma on likimain

normaalijakauma odotusarvolla α ja varianssilla σ^2, jossa su-estimaattorien ja σ^2:n lausekkeet ovat

$$\widehat{\mu}_0 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4} y_i, \quad \widehat{\mu}_1 = y_5, \quad \widehat{\alpha} = \log(\widehat{\rho}) = \log(\widehat{\mu}_1) - \log(\widehat{\mu}_0), \quad \sigma^2 = \frac{1}{4\widehat{\mu}_0} + \frac{1}{\widehat{\mu}_1}.$$

Parametrin α priorijakaumaksi omaksutaan normaalijakauma prioriodotusarvolla α_0 ja priorivarianssilla ν_0.

Näillä oletuksilla parametrin α posteriorijakauma on likimain normaalijakauma odotusarvolla α_1 ja varianssilla ν_1, jossa

$$\nu_1 = \left(\frac{1}{\nu_0} + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{-1}, \qquad \alpha_1 = \frac{\nu_0^{-1}\alpha_0 + \sigma^{-2}\widehat{\alpha}}{\nu_0^{-1} + \sigma^{-2}}.$$

(a) *Syventäviin opintoihin*: Perustele edellä kerrottu tulos koskien α:n likimääräistä posteriorijakaumaa.

(b) Kirjoita Jags-malliskripti, jolla simuloidaan odotusarvojen suhteen $\rho = \mu_1/\mu_0$ posteriorijakaumaa edellä määriteltyyn normaaliapproksimaatioon sekä latteaan priorijakaumaan $\alpha \sim N(0, 10^{-6})$ perustuen ja jolla saadaan allaolevat tulokset, joista mainittakoon, että `prhogt1` tarkoittaa todennäköisyyttä $\mathbb{P}(\rho > 1 \mid y)$. Tarvittavat havaintovektorin $y = (y_1, \ldots, y_5)$ muunnokset kannattaa tehdä tämän skriptin ulkopuolella tavanomaisten R-komentojen avulla.

```
> rhomalli <- jags.model("poisrho.txt", data = list(alphahat = alphahat,
+     SE = SE))
> rhosimu <- coda.samples(rhomalli, c("alpha", "rho", "prhogt1"),
+     n.iter = 10000)

> summary(rhosimu)

Iterations = 1:10000
Thinning interval = 1
Number of chains = 1
Sample size per chain = 10000

1. Empirical mean and standard deviation for each variable,
   plus standard error of the mean:

         Mean     SD Naive SE Time-series SE
alpha   1.985 0.1708 0.001708       0.001576
prhogt1 1.000 0.0000 0.000000       0.000000
rho     7.388 1.2736 0.012736       0.011928

2. Quantiles for each variable:

         2.5%   25%   50%   75%  97.5%
alpha   1.647 1.870 1.986 2.101  2.321
prhogt1 1.000 1.000 1.000 1.000  1.000
rho     5.190 6.487 7.287 8.175 10.181
```

(c) Esitä tiivis sanallinen selostus saaduista tuloksista ja niiden pohjalta tekemistäsi päätelmistä.

4. Tee selkoa priorijakaumien merkityksestä ja roolista sekä niistä periaatteista joiden nojalla priorijakauma valitaan ja määritellään bayesiläisessä analyysissä ja päättelyssä.

5. Tee selkoa posteriorijakauman MCMC-simuloinnissa tuotettavien ketjujen suppenemisdiagnostiikan periaatteista ja perusmenetelmistä.

6. *Vain syventäviin opintoihin*: Hepatiitti B-virusta (HBV) vastaan kehitetyn rokotteen tehoa tutkittiin Gambiassa. Mitattavana vasteena on vasta-ainemäärä A_{ij} henkilöllä i mittauskertana $j = 1, 2, 3$, jolloin oli kulunut t_{ij} vuorokautta rokottamisesta. Mittauskertoja oli korkeintaan 3 per henkilö. Seuraavassa kuvassa on esitetty kaikkien tutkittujen henkilöiden ($n = 106$) mittaussarjat rokottamisesta kuluneen ajan funktiona.

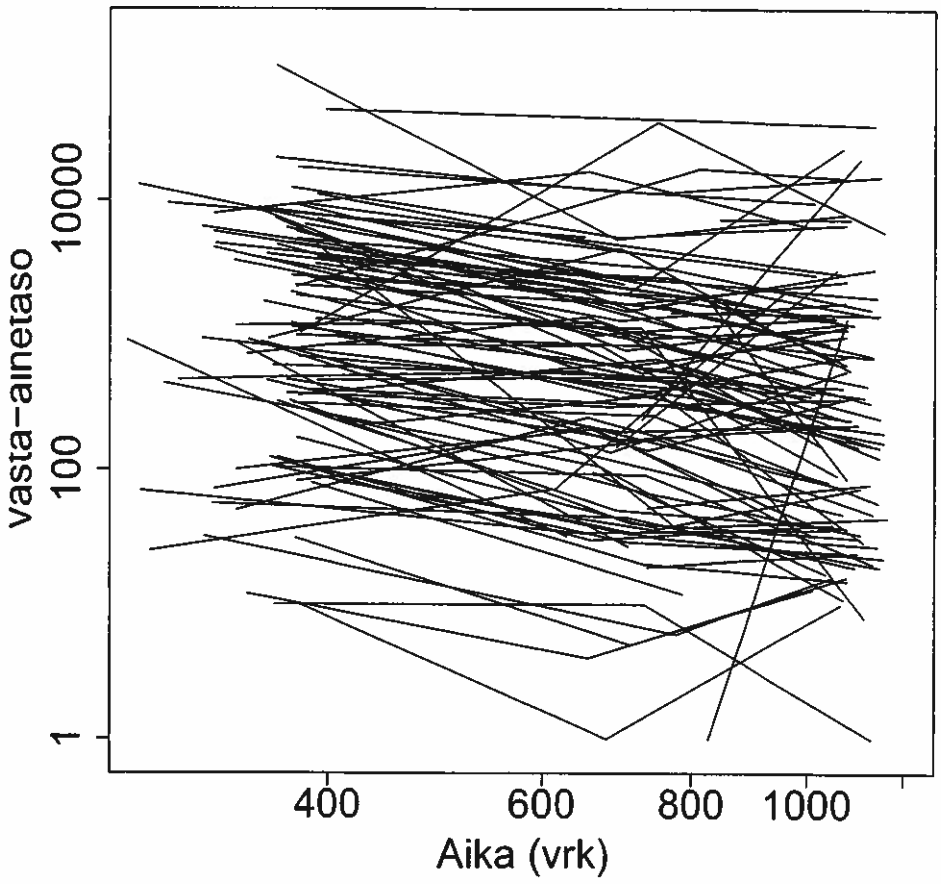
Vasta-ainetasojen logaritmien $y_{ij} = \log(A_{ij})$ malliksi omaksutaan $y_{ij} \mid \mu_{ij}, \sigma^2 \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, 2, 3$) muista havainnoista ehdollisesti riippumatta siten, että odotusarvot riippuvat lineaarisesti ajan logaritmista:

$$\mu_{ij} = \alpha_i + \beta_i[\log(t_{ij}/730)], \quad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, 2, 3.$$

Regressiokertoimien oletetaan noudattavan seuraavia malleja

$$\alpha_i \mid \mu_\alpha, \sigma_\alpha^2 \sim N(\mu_\alpha, \sigma_\alpha^2), \quad \beta_i \mid \mu_\beta, \sigma_\beta^2 \sim N(\mu_\beta, \sigma_\beta^2), \quad i = 1, \ldots n,$$

toisistaan ehdollisesti riippumatta. Kaikki tarvittavat hyperpriorijakaumat määritetään latteiksi: odotusarvoille $N(0, 10^{-6})$ ja tarkkuuksille Gamma$(10^{-3}, 10^{-3})$ toisistaan riippumatta.



Simuloinnin jälkeen saatiin seuraavat tulokset, jossa `sigma`, `sigma.alpha`, `sigma.beta` viittaavat vastaavien varianssien $\sigma^2, \sigma_\alpha^2, \sigma_\beta^2$ neliöjuuriin.

```
Iterations = 1:10000
Thinning interval = 1
Number of chains = 1
Sample size per chain = 10000

1. Empirical mean and standard deviation for each variable,
   plus standard error of the mean:

               Mean      SD  Naive SE Time-series SE
mu.alpha     6.0358 0.19216 0.0019216       0.002328
mu.beta     -1.0528 0.12890 0.0012890       0.013653
sigma        1.0035 0.05659 0.0005659       0.001480
sigma.alpha  1.8617 0.14850 0.0014850       0.001884
sigma.beta   0.2071 0.16612 0.0016612       0.020800

2. Quantiles for each variable:

               2.5%      25%     50%     75%   97.5%
mu.alpha     5.65730  5.90952  6.0377  6.1647  6.4087
mu.beta     -1.29419 -1.13819 -1.0617 -0.9663 -0.8017
sigma        0.90172  0.96479  1.0008  1.0386  1.1175
sigma.alpha  1.60107  1.75944  1.8558  1.9525  2.1707
sigma.beta   0.02917  0.07757  0.1565  0.2944  0.6091
```

(a) Piirrä suunnattu, syklitön vuokaavio eli DAG, joka havainnollistaa graafisesti näiden oletusten määrittelemän mallikokonaisuuden elementit ja niiden keskinäiset suhteet.

(b) Kirjoita Jags-skripti, jolla tämän mallin parametrien posteriorijakaumaa voidaan simuloida.

(c) Tulkitse sanallisesti mallin sisältö sekä saadut tulokset. Kommentoi erityisesti regressiokertoimille α_i ja β_i tehtyjä oletuksia ja miten niitä voi tässä tilanteessa perustella verrattuna ajateltavissa oleviin vaihtoehtoihin, kuten siihen että $\alpha_i = \alpha$ ja $\beta_i = \beta$, $i = 1, \ldots, n$, tai että kaikki α_i:t ja β_i:t olisivat toisistaan täysin erillisiä parametreja.

Ntzoufras, I. (2009) Bayesian Modeling Using WinBugs. Wiley, Hoboken NJ.

Table 3.3 Functions available in WinBUGS

WinBUGS Syntax	Function	Description
1. `abs(x)`	$\lvert x \rvert$	Absolute value
2. `cloglog(x)`	$\log(-\log(1-x))$	Complementary log–log function
3. `cos(x)`	$\cos(x)$	Cosine function
4. `cut(x)`		Posterior of x is not updated by the likelihood
5. `equals(x1, x2)`	$f(x_1, x_2) = 1$ when $x_1 = x_2$ $= 0$ otherwise	Binary indicator function for equal nodes
6. `exp(x)`	e^x	Exponent value
7. `inprod(v1[], v2[])`	$\sum_i v_{1i} v_{2i}$	Inner product of two vectors
8. `interp.lin(x, v1[], v2[])`	$v_{2i} + (v_{2,i+1} - v_{2i})$ $\times (x - v_{1i})/(v_{1,i+1} - v_{1i})$	Interpolation line
8. `inverse(M[,])`	A^{-1}	Inverse of a symmetric positive-definite matrix
9. `log(x)`	$\log(x)$	Logarithm (ln)
10. `logdet(M[,])`	$\log \lvert A \rvert$	Logarithm of the determinant of a symmetric positive-definite matrix
11. `logfact(k)`	$\log(k!)$	Log factorial function of an integer
12. `loggam(x)`	$\log(\Gamma(x))$	Log gamma function
13. `logit(x)`	$\log \frac{x}{1-x}$	Logit function
14. `max(x1, x2)`	$\max(x_1, x_2)$	Maximum of two values
15. `mean(v[])`	$\overline{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i/n$, where n is the length of vector v	Sample mean
16. `min(x1, x2)`	$\min(x_1, x_2)$	Minimum of two values
17. `phi(x)`	$P(X \le x),\ X \sim N(0,1)$	CDF of standardized normal
18. `pow(x, z)`	x^z	Power function
19. `sin(x)`	$\sin(x)$	Sine function
20. `sqrt(x)`	$\sqrt{x}$	Square root
21. `rank(v[], k)`	$\sum_i I(v_i \le v_k)$, where $I(z) = 1$ if z true and 0 otherwise	Rank of s component of a vector
22. `ranked(v[], k)`	$v_i : \sum_s I(v_s \le v_i) = k$	Element of a vector with rank s
23. `round(x)`		Round to the closest integer
24. `sd(v[])`	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i - \overline{v})^2/(n-1)}$	Sample standard deviation
25. `step(x)`	$f(x) = 1$ when $x \ge 0$; 0 otherwise	Binary indicator function of positive nodes
26. `sum(v[])`	$\sum_i v_i$	Sum of a vector's components
27. `trunc(x)`		Truncation to the closest smaller than x integer

Key: `x`, `z` = single real value or logical or mathematical expression; `k` = single integer value; `v` = vector; `M` = matrix.

Ntzoufras, I. (2009). Bayesian Modeling Using WinBUGS. Wiley, Hoboken, NJ.

Table 3.1 Univariate distributions available in WinBUGS

Distribution name	WinBUGS syntax	Probability or density function $f(x)$	Mean	Variance
		Discrete distributions		
(1) Bernoulli	`x ~ dbern(p)`	$p^x(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$
(2) Binomial	`x ~ dbin(p, n)`	$n!p^x(1-p)^{n-x}/[x!(n-x)!]$	np	$np(1-p)$
(3) Categorical	`x ~ dcat(p[])`	p_x	$\sum_{x=1}^{K} xp_x$	$\sum_{x=1}^{K}[x-E(x)]^2p_x$
(4) Negative binomial	`x ~ dnegbin(p, r)`	$(x+r-1)!p^r(1-p)^x/[x!(r-1)!]$	$r(1-p)/p$	$r(1-p)/p^2$
(5) Poisson	`x ~ dpois(lambda)`	$\exp(-\lambda)\lambda^x/x!$	λ	λ
		Continuous distributions		
(6) Beta	`x ~ dbeta(a, b)`	$\Gamma(a+b)x^{a-1}(1-x)^{b-1}/[\Gamma(a)\Gamma(b)]$	$a/(a+b)$	$ab/[(a+b)^2(a+b+1)]$
(7) Chi-squared	`x ~ dchisqr(k)`	See gamma$(k/2, \frac{1}{2})$	k	$2k$
(8) Double exponential	`x ~ ddexp(mu, tau)`	$\frac{1}{2}\tau\exp(-\tau\lvert x-\mu\rvert)$	μ	$\sqrt{2}/\tau$
(9) Exponential	`x ~ dexp(lambda)`	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
(10) Gamma	`x ~ dgamma(a, b)`	$b^a x^{a-1}e^{-bx}/\Gamma(a)$	a/b	a/b^2
(11) Generalized gamma	`x ~ gen.gamma(a, b, r)`	$rb(bx)^{ra-1}\exp\left[-(bx)^r\right]/\Gamma(a)$	$\Gamma(a+1/r)/[b\Gamma(a)]$	$[\Gamma(a+2/r^2)\Gamma(a)-\Gamma(a+1/r)^2]/[\lambda\Gamma(a)]^2$
(12) Log-normal	`x ~ dlnorm(mu, tau)`	$\sqrt{\tau/(2\pi)}x^{-1}\exp\left[-\tau/2(\log x-\mu)^2\right]$	$e^{\mu+1/(2\tau)}$	$(e^{1/\tau}-1)e^{2\mu+1/\tau}$
(13) Logistic	`x ~ dlogis(mu, tau)`	$\tau e^{\tau(x-\mu)}\left[1+e^{\tau(x-\mu)}\right]^{-2}$	μ	$\pi^2/[3\tau^2]$
(14) Normal	`x ~ dnorm(mu, tau)`	$\sqrt{\tau/(2\pi)}\exp[-\tau(x-\mu)^2/2]$	μ	$1/\tau$
(15) Pareto	`x ~ dpar(a, c)`	$ac^a x^{-a-1}$	$ab/(a-1)$	$ab^2/[(a-1)^2(a-2)]$
(16) Student's t	`x ~ dt(mu, tau, v)`	$\Gamma[(v+1)/2]\sqrt{\cancel{\tau}/(2\pi)}\,[\Gamma(v/2)]^{-1}$ $\times\left[1+\tau v^{-1}(x-\mu)^2\right]^{-(v+1)/2}$ (τv^{-1})	μ	$v\tau^{-1}/(v-2)$
(17) Uniform	`x ~ dunif(a, b)`	$1/(b-a)$	$\frac{1}{2}(a+b)$ ~~$b/(a+b)$~~	$\frac{1}{12}(b-a)^2$
(18) Weibull	`x ~ dweib(v, lambda)`	$v\lambda x^{v-1}\exp(-\lambda x^v)$	$\lambda^{-1/v}\Gamma\left(1+v^{-1}\right)$	$\left[\Gamma\left(1+2v^{-1}\right)-\Gamma\left(1+v^{-1}\right)^2\right]\lambda^{-2/v}$

Key: $p \in (0,1)$; **(1)** $x = 0, 1$; **(2)** $x = 0, 1\ldots, n$, $p \in (0,1)$; **(3)** $p[]$ is a vector of dimension K, $x = 1, 2, \ldots, K$ and elements $p[x] = p_x \in (0,1)$, $\sum_{x=1}^{K} p_x = 1$; **(4)** $x = 0, 1, 2, \ldots$; $r = 1, 2, \ldots$; **(5)** $x = 0, 1, 2, \ldots$; $\lambda > 0$; **(6)** $x \in (0,1)$, $a, b > 0$; **(8)** $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; **(9)** $x > 0$, $\lambda > 0$; **(10, 11)** $x > 0$, $a, b, r > 0$; **(12)** $x > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$; **(13, 14, 16)** $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\tau, v > 0$; **(15)** $x > c$, $a, c > 0$; **(17)** $x \in (a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$; **(18)** $x > 0$, $v, \lambda > 0$.

Ntzoufras, I. (2009) Bayesian Modeling Using WinBUGS. Wiley, Hoboken, NJ.

Table 3.2 Multivariate distributions available in WinBUGS

Distribution name	WinBUGS syntax	Probability or density function $f(x)$	Mean	Variance/covariance
		Discrete distributions		
(19) Multinomial	`x[1:K] ~ dmulti(p[], N)`	$N!\left(\prod_{i=1}^{K} x_i!\right)^{-1}\prod_{i=1}^{K} p_i^{x_i}$	$E(X_i) = Np_i$	$V(X_i) = Np_i(1-p_i)$ $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -Np_ip_j$
		Continuous distributions		
(20) Dirichlet	`x[1:K] ~ ddirch(a[])`	$\Gamma(a)\left[\prod_{i=1}^{K}\Gamma(a_i)\right]^{-1}\prod_{i=1}^{K} x_i^{a_i-1}$	$E(X_i) = a_i/a$	$V(X_i) = a_i(a-a_i)/[a^2(a+1)]$ $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = -a_ia_j/[a^2(a+1)]$
(21) Multivariate normal	`x[1:K] ~ dmnorm(mu[], T[,])`	$(2\pi)^{-K/2}\lvert T\rvert^{1/2}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-\mu)^T T(x-\mu)\right]$	$E(X) = \mu$	$V(X) = T^{-1}$
(22) Multivariate Student's t	`x[1:K] ~ dmt(mu[], T[,], v)`	$\left\{(v\pi)^{-K/2}\Gamma[(v+K)/2]\,\lvert T\rvert^{1/2}/\Gamma(v/2)\right\}$ $\times\left[1+v^{-1}(x-\mu)^T T(x-\mu)\right]^{-(v+K)/2}$	$E(X) = \mu$	$V(X) = v(v-2)^{-1}T^{-1}$
(23) Wishart	`x[1:K,1:K] ~ dwish(R[,], v)`	$\lvert R\rvert^{v/2}\lvert x\rvert^{(v-K-1)/2}\exp\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(Rx)\right]$	$E(X_{ij}) = vA_{ij}$	$\mathrm{Cov}(X_{ij}, X_{km}) = v(A_{ik}A_{jm} + A_{im}A_{jk})$

Key: **(19)** $x[\,]$ and $p[\,]$ are vectors of dimension K with elements $x[i] = x_i = 0, 1, 2, \ldots$ and $p[i] = p_i \in (0,1)$ with $\sum_{i=1}^{K} x_i = N$ and $\sum_{i=1}^{K} p_i = 1$; **(20)** $x[\,]$ and $a[\,]$ are vectors of dimension K with elements $x[i] = x_i \in (0,1)$ and $a[i] = a_i > 0$ with $\sum_{i=1}^{K} x_i = 1$ and $a = \sum_{i=1}^{K} a_i$; **(21, 22)** $x[\,]$ and $mu[\,]$ (x and μ) are vectors of dimension K with elements $x[i] = x_i \in (0,1)$ and $\mu[i] = \mu_i \in \mathbf{R}$. $T[\,]$ (and T) is a $K \times K$ symmetric precision matrix with elements $T[i,j] = \tau_{ij} > 0$; $v > 0$; **(23)** $x[,]$ and $R[,]$ (x and R) are $K \times K$ positive-definite (symmetric) matrices with elements $x[i,j] = x_{ij}$ and $R[i,j] = R_{ij}$; A_{ij} are the element of the matrix $A = R^{-1}$; $v > 0$. Also μ_i: mean of X_i; $V(X_i)$, $\mathrm{Cov}(X_i, X_i)$: variance of X_i; $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$: covariance between X_i and X_j.