Johdatus distribuutioteoriaan

Loppukoe 14.3.2011 (M. Harju)

1. (6p.) Olkoon $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ja $u \in D'(\mathbb{R}^n)$. Määrittele tulo fu distribuutiona siten, että se yleistää funktioiden tulon. Osoita, että määrittelemäsi tulo fu todella on distribuutio eli $fu \in D'(\mathbb{R}^n)$.

2. (6p.) Tarkastellaan yksiulotteista distribuutioavaruutta $D'(\mathbb{R})$. Merkitään distribuution u kertalukua m olevaa derivaattaa symbolilla $u^{(m)}$. Osoita, että

$$x^k\delta^{(m)} = \begin{cases} 0, & k > m \\ (-1)^k k!\delta, & k = m \\ (-1)^k \frac{m!}{(m-k)!}\delta^{(m-k)}, & k < m. \end{cases}$$

3. (a) (2p.) Olkoon $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial_j^2$ ja $f(x) = |x|^2, x \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $f\Delta\delta = 2n\delta$ distribuutioavaruudessa $D'(\mathbb{R}^n)$.

   (b) (4p.) Besselin differentiaaliyhtälön

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

   eräs ratkaisu on funktio $J_0(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, jolle tiedetään pätevän $J_0(0) = 0$. Osoita, että tulo $J_0(x)H(x)$ ratkaisee saman differentiaaliyhtälön distribuutiomielessä, kun $H(x)$ on Heavisiden funktio.

4. (a) (1p.) Esitä (jokin) määritelmä Schwartzin testifunktion $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ Fourier-muunnokselle $\widehat{f}(\xi) = \mathcal{F}f(\xi), \xi \in \mathbb{R}^n$.

   (b) (2p.) Osoita edellistä määritelmääsi käyttäen, että

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)g(\xi)d\xi, \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

   (c) (1p.) Esitä Fourier-muunnoksen määritelmä temperoidulle distribuutiolle $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

   (d) (2p.) Laske δ-distribuution Fourier-muunnos.

5. (6p.) Tarkastellaan yksiulotteista Fourier-muunnosta $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Tiedetään, että tämän muunnoksen mahdolliset ominaisarvot ovat $\lambda = 1, -1, i, -i$. Oletetaan tunnetuksi, että ominaisarvoa $\lambda = 1$ vastaava ominaisfunktio on $e^{-x^2/2}$. Osoita, että funktiot

$$xe^{-x^2/2}, \quad (x^2 - 1/2)e^{-x^2/2}, \quad (x^3 - 3x/2)e^{-x^2/2}$$

   ovat myös ominaisfunktioita. Määrää lisäksi niitä vastaavat ominaisarvot.