

Johdatus matemaattiseen päättelyyn
Loppukoe 1.11.2010

1. (a) Muodosta seuraavan väitteen antiteesi: kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee, että $2n + 1 > 0$.
(b) Oletetaan, että m on parillinen luonnollinen luku ja n on pariton luonnollinen luku. Osoita, että $m + n$ on pariton.

2. (a) Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perustele vastauksesi.

(1) Jos $A = \{1, 2\}$ ja $B = \{1, 2, 3\}$, niin $A \cap B = \emptyset$.

(2) Jos $A \subset C$ ja $B \subset D$, niin $A \cup B \subset C \cup D$.

(3) Olkoot $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{0, 1, 2\}$. Määritellään $f : A \rightarrow B$ seuraavasti:

$$f(a) = 1, f(b) = 0 \text{ ja } f(c) = 1.$$

Tällöin $f^{-1}(\{1\}) = \{a\}$.

(b) Tarkastellaan kuvauksia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + 1$, ja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(x) = (x^2, x)$. Määritä yhdistetyt kuvaukset $f \circ g$ ja $g \circ f$.

3. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$.

(a) Onko f injektio? Perustele vastauksesi.

(b) Onko f surjektio? Perustele vastauksesi.

4. Todista induktioperiaatetta käyttäen, että

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ kaikilla } n = 1, 2, \dots$$