

Johdatus matemaattiseen päättelyyn
Loppukoe 30.1.2012

1. Tarkastellaan väitelausetta: jos m ja n ovat kokonaislukuja ja mn on pariton kokonaisluku, niin m ja n ovat parittomia.

- (a) Mikä on oletus ja mikä on väite?
- (b) Muodosta väitteen antiteesi.
- (c) Todista väite.

2. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perustele vastauksesi.

- (a) Yhtälöllä $x^3 = x^2$ on kaksi erisuurta ratkaisua.
- (b) Jokainen kokonaisluku voidaan esittää kahden erisuuren kokonaisluvun summana.
- (c) Jos n on luonnollinen luku, niin $n(n + 1)$ on parillinen.

3. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2, y)$.

- (a) Onko kuvaus f injektio? Perustele vastauksesi.
- (b) Onko kuvaus f surjektio? Perustele vastauksesi.

4. Todista, että

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla $n \geq 1$.

5. Tarkastellaan kuvausta $f : A \rightarrow B$.

- (a) Osoita, että jos f on injektio, niin $f^{-1}(f(C)) = C$ kaikilla $C \subset A$.
- (b) Osoita, että jos f on surjektio, niin $f(f^{-1}(D)) = D$ kaikilla $D \subset B$.