

Johdatus matemaattiseen päättelyyn
Loppukoe 31.11.2011

1. Tarkastellaan väitelausetta: jos m ja n ovat luonnollisia lukuja ja mn on pariton, niin m ja n ovat parittomia.

- (a) Mikä on oletus ja mikä on väite?
- (b) Muodosta väitteen antiteesi.
- (c) Todista väite.

2. Ovatko seuraavat väitteet tosia? Perustele vastauksesi.

- (a) Jos $x + y$ on irrationaaliluku, niin x ja y ovat irrationaalilukuja.
- (b) Olkoot $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{0, 1, 2\}$. Määritellään $f : A \rightarrow B$ seuraavasti:

$$f(a) = 1, f(b) = 0 \text{ ja } f(c) = 1.$$

Tällöin $f^{-1}(\{1\}) \neq \emptyset$.

- (c) Jos $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$ ja $C = \{1, 2\}$, niin $(2, 1) \in A \times (B \cup C)$.

3. (a) Onko kuvaus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x + 2$, injektio? Perustele vastauksesi.

(b) Onko kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$, surjektio? Perustele vastauksesi.

4. Todista, että

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ kaikilla } n = 1, 2, \dots$$

5. Olkoot n ja m kokonaislukuja. Osoita, että $m^2(n+1)$ on parillinen, jos ja vain jos m on parillinen tai n on pariton.