JOHDATUS STOKASTIIKKAAN KEVÄT 2011

Loppukoe ma 20.6 klo 12–16

Perustele tarkasti kaikki päätelmäsi!

1. Olkoon satunnaismuuttujan X ehdollinen jakauma ehdolla $N = n$ $\mathrm{Bin}(n, p)$. Jos oletamme, että N noudattaa Poisson-jakaumaa parametrina $\lambda > 0$, mikä on muuttujan X reunajakauma? (6 p)

2. Olkoon satunnaisvektorin $\mathbf{X} = (X_1, X_2)'$ momenttigeneroiva funktio

$$\psi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \exp(t_1^2 + 4t_2^2 + 3t_1t_2), \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Määrää satunnaisvektorin $\mathbf{X}$ tiheysfunktio. (6 p)

3. Olkoon $X_1, X_2, \ldots$ jono i.i.d. (riippumattomia ja samoin jakautuneita) ei-negatiivisia kokonaislukuarvoisia satunnaismuuttujia, ja olkoon N ei-negatiivinen kokonaislukuarvoinen satunnaismuuttuja, joka on riippumaton muuttujista $X_1, X_2, \ldots$. Määritellään $S_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \geqslant 1$, ja $S_0 := 0$. Esitä ja todista tulos, joka ilmaisee muuttujan S_N generoivan funktion (ja siten jakauman) muuttujien X_i generoivan funktion avulla. (6 p)

4. Olkoot satunnaismuuttujat $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. (riippumattomia ja samoin jakautuneita) jakaumasta jolla aidosti kasvava ja jatkuva kertymäfunktio $\mathbb{F}$, ja olkoon $(X_{(1)}, \ldots, X_{(n)})'$ vastaavista järjestetyistä havainnoista muodostettu vektori.

(a) Määrää muuttujien $\mathbb{F}(X_{(1)}), \ldots, \mathbb{F}(X_{(n)})$ yhteisjakauma ja -tiheys. (3 p)

(b) Olkoot $Y_1 := \mathbb{F}(X_{(1)}), Y_2 := \mathbb{F}(X_{(2)}) - \mathbb{F}(X_{(1)}), \ldots, Y_n := \mathbb{F}(X_{(n)}) - \mathbb{F}(X_{(n-1)})$. Määrää muuttujien $Y_1, \ldots, Y_n$ yhteisjakauma ja -tiheys. (3 p)