

1. a) Määrää luvun $1/13$ desimaaliesitys.

b) Määrää luvun

$$\frac{1}{2^a 5^c \cdot 13}, \quad a, c \in \mathbb{N}$$

desimaaliesityksen alkutermiä ja jakson pituudet.

2. a) Olkoon $d \in \mathbb{Z}^+$. Määrää luvun $\sqrt{d^2 + 1}$ yksinkertainen ketjumurtolukuesitys.

b) Määrää jaksollisen ketjumurron $[2, 4]$ arvo.

3. Olkoot luvut A_n ja B_n annettu rekursioilla

$$A_{n+2} = b_{n+2}A_{n+1} + a_{n+2}A_n, \quad B_{n+2} = b_{n+2}B_{n+1} + a_{n+2}B_n,$$

lähtien alkuarvoista $A_0 = b_0$, $B_0 = 1$, $A_1 = b_0b_1 + a_1$ ja $B_1 = b_1$. Osoita, että tällöin

$$A_{n+1}B_n - A_nB_{n+1} = (-1)^n a_1 \cdots a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. a) Olkoon $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$. Osoita, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{b^{n^2}} \notin \mathbb{Q}.$$

b) Käyttäen tulosta

$$\tan z = \frac{z}{1+} \frac{-z^2}{3+} \frac{-z^2}{5+} \frac{-z^2}{7+} \dots$$

näytä, että

$$\pi \notin \mathbb{Q}.$$