

## Kompleksianalyysi I

Loppukoe 2.4.2012 (J. Arhippainen)

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. a) Laske  $(1 - i)^{11}$  ja  $(-1 + i\sqrt{3})^8$ .

b) Ratkaise yhtälö  $z^4 = -1$ .

2. a) Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i2^n + 1}{2i + 2^n}.$$

b) Osoita, että funktio  $f(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  on bijektio  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

3. a) Laske raja-arvo  $\lim_{z \rightarrow 1+i} \frac{z^2 - (1+2i)z - 1+i}{z^2 - (1+i)z}$ .

b) Ratkaise yhtälö  $e^z = -i$ .

4. Olkoon  $f(z) = \frac{1}{z+i}$ ,  $z \neq -i$ . Määrä  $f$  muodossa  $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ . Tutki toteuttaako  $f$  Cauchy-Riemannin yhtälöt.

5. Laske integraali  $\int_{\gamma} (z + \frac{1}{2}\bar{z})dz$ , kun  $\gamma$  on jana  $1+i \rightarrow -2$ .