

KOMPLEKSIANALYYSI I

Loppukoe 11.4.2011 (J. Arhippainen)

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Ratkaise yhtälöt

a) $i\bar{z} + 2z = 1 - 3i$, b) $z^2 = -15 - 8i$, c) $z^2 + (2i - 3)z + 5 - i = 0$.

2. a) Määää luku $1 - i\sqrt{3}$ napakoordinaateissa ja laske $(1 - i\sqrt{3})^{15}$.

b) Ratkaise yhtälö $z^3 = -i$.

3. a) Osoita, että funktio $f : S[0, \pi[\rightarrow \mathbb{C}$, jolle $f(z) = z^2 - i$, $z \in S[0, \pi[$, on bijektio. Määää $f^{-1}(z)$.

b) Määää raja-arvo $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + i \cdot 2^n}{2^n + 3i}$.

4. Olkoon $f(z) = \frac{1}{z+i}$, $z \neq -i$. Määää funktio f muodossa $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Tutki toteuttaako f Cauchy-Riemannin yhtälöä. Määää $f'(z)$, $z \neq -i$.

5. Ratkaise yhtälöt

a) $e^{\bar{z}} = 1 + i$, b) $\sin z = i$.