Analyysi III, 10.5.2010

1.

(a) Määrittele $L^p(E)$ avaruus ja sen normi, kun $E \subset \mathbb{R}^n$ on mitallinen joukko ja $1 \leq p < \infty$.

(b) Esitä Egoroffin lause.

(c) Esitä Hölderin epäyhtälö.

(d) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Näytä, että $m_n^*(\{x\}) = 0$.

2. (a) Olkoon $(H, (\cdot|\cdot))$ kompleksinen sisätuloavaruus. Oletetaan, että

$$||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2.$$

Seuraako tästä, että $(x|y) = 0$? Luonnollisesti vastaus on perusteltava.

(b) Keksi esimerkki funktiosta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jolle f^2 on mitallinen, mutta f ei ole mitallinen.

3. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ mitallinen joukko ja $f : E \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio siten, että

$$\int_E |f| \, dm < \infty.$$

Jos $A_n = \{x \in E : f(x) > n\}$ $(n = 1, 2, ...)$, niin osoita, että $m(A_n) \to 0$ kun $n \to \infty$.

4. Osoita, että

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \frac{1}{2},$$

missä $f_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{x+1}$, kun $x \in [0, 1]$ ja $n = 1, 2, ...$

Luonnollisesti vastaus on perusteltava.

5. Reaalisten polynomien avaruus

$$P_3(\mathbb{R}) = \{p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

on $\mathbb{R}$-kertoiminen vektoriavaruus. Etsi sellainen $p \in P_3(\mathbb{R})$, että $p(0) = 0$, $p'(0) = 0$ ja

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx$$

on niin pieni kuin mahdollista.