802667S Koodausteoria
Loppukoe 15.12.2011

1. Olkoon C binäärinen lineaarinen koodi, jonka generoijamatriisi

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Määrää koodin C tarkistusmatriisi ja minimietäisyys. Etsi sanaa 110011 lähin koodisana.

2. Määrittele alkion $\alpha \in \mathbb{F}_{q^m}$ minimaalipolynomi $m_\alpha(x)$ kunnan $\mathbb{F}_q$ suhteen. Osoita seuraavat tulokset:

   (a) Minimaalipolynomi $m_\alpha(x)$ on olemassa ja se on jaoton renkaassa $\mathbb{F}_q[x]$.

   (b) Jos $f(x) \in \mathbb{F}_q[x]$ ja $f(\alpha) = 0$, niin minimaalipolynomi $m_\alpha(x)$ jakaa polynomin $f(x)$ renkaassa $\mathbb{F}_q[x]$.

3. Määrittele syklinen koodi. Olkoot $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ äärellinen kunta ja n ehdon $\operatorname{syt}(n, q) = 1$ toteuttava kokonaisluku.

   (a) Osoita, että renkaan R_n osajoukko C on syklinen koodi jos ja vain jos C on renkaan R_n ideaali.

   (b) Osoita, että syklisen koodin $\langle f(x) \rangle \subseteq R_n$ generoijapolynomi on

$$g(x) = \operatorname{syt}(f(x), x^n - 1).$$

4. Olkoot $G(x) = x^2 + 1$, $L = \{\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6\}$ ja $\alpha \in \mathbb{F}_8$ toteuttaa ehdon $\alpha^3 = \alpha + 1$. Määrää binääriselle Goppa-koodille $\Gamma(L, G)$ sellainen $\mathbb{F}_8$-kertoiminen matriisi $\hat{H}$, että $c\hat{H}^T = 0$ jos ja vain jos $c \in \Gamma(L, G)$. Muodosta koodille $\Gamma(L, G)$ tarkistusmatriisi.

5. Olkoon C binäärinen kaksi virhettä korjaava 15-pituinen BCH-koodi, jonka muodostamisessa on käytetty kunnan $\mathbb{F}_{16}$ primitiivistä alkiota α, jolle $\alpha^4 = \alpha + 1$. Määrää koodin C generoijapolynomi. Etsi vastaanotettua sanaa 1111 0101 0100 000 lähinnä oleva koodisana.

Muista perustella kaikki päättelysi!
Ei muita apuvälineitä kuin kirjoitusvälineet!