

Koulumatematiikan perusteet

Loppukoe 30.11.2009

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. a) Määrittele luonnollisten lukujen joukko Peanon aksiomeilla.
b) Osoita induktiolla oikeaksi summakaava

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1},$$

kun $n > 0$.

2. a) Esitä luku 781_9 3-kantaisessa lukujärjestelmässä.
b) Laske allekkain $1234_5 \cdot 3002_5$.
c) Laske allekkain $4434201_5 - 434421_5$.
3. Pitävätkö seuraavat väitteet paikkaansa? (Tarkat perustelut.)
 - a) Jos l, n ja m ovat kokonaislukuja ja $ln|m$, niin $l|m$ tai $n|m$. (1 p.)
 - b) Jos x on rationaaliluku ja y on irrationaaliluku, niin xy on irrationaaliluku. (2 p.)
 - c) Luku $\log_2 3$ on irrationaalinen. (3 p.)
4. a) Määrittele reaalilukujen yhteenlasku ja ei-negatiivisten reaalilukujen tulo.
b) Laske määritelmän perusteella lukujen $3,1$ ja $0,\overline{01}$ summa ja tulo.
5. a) Määrittele, mitä tarkoitetaan, kun sanotaan, että joukot A ja B ovat yhtämahtavat. (1 p.)
b) Olkoon

$$A = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 0,1\}.$$

Ovatko A ja positiivisten rationaalilukujen joukko \mathbb{Q}^+ yhtämahtavat? (Perustele vastauksesi !) (5 p.)