

Lebesguen mitta- ja integraaliteoria, 7.3.2011

1.

(a) Määrittele Lebesguen integraali $\int_E f dm$ kun E on mitallinen joukko ja f mitallinen, ei-negatiivinen funktio joukossa E .

(b) Esitä Egoroffin lause.

(c) Esitä Lebesguen monotonisen konvergenssin lause.

(d) Olkoon $x \in \mathbb{R}^n$. Näytä, että $m_n^*({x}) = 0$.

2. Todista Fatoun lemma käyttämällä apuna monotonisen konvergenssin lausetta.

3. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ sellainen mitallinen joukko, että $E \subset]0, 1[$ ja $m(E) > 1/2$. Osoita, että on olemassa $x, y \in E$ siten, että $x + y = 1$.

4. Olkoot $E \subset \mathbb{R}$ mitallinen joukko ja $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ mitallinen funktio siten, että

$$\int_E |f| dm < \infty.$$

Jos $A_n = \{x \in E : |f(x)| > n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), niin osoita, että $m(A_n) \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$.

5. Tiedetään, että

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x/n}(1 - \cos x)}{x^2} dx = \arctan n - \frac{2}{n} \ln\left(\frac{1+n^2}{n^2}\right) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Laske tämän avulla,

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$