

Lebesguen mitta- ja integraaliteoria, 12.3.2012

1. (a) Määrittele Lebesguen n -ulotteinen ulkomitta m_n^* . Osoita, että numeroituva joukko on aina nollamittainen.

(b) Määrittele mitallinen joukko ja mitallinen funktio.

(c) Osoita, että jos joukon E ulkomitta on nolla, niin se on mitallinen.

2. (a) Esitä Lebesguen monotonisen konvergenssin lause.

(b) Todista Fatoun lemma käyttämällä apuna monotonisen konvergenssin lausetta ja anna esimerkki tilanteesta jossa siinä vallitsee aito epäyhtälö.

3. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ sellainen mitallinen joukko, että $E \subset]0, 1[$ ja $m(E) > 1/2$. Osoita, että on olemassa $x, y \in E$ siten, että $x + y = 1$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mitallinen funktio, ja asetetaan

$$A_n = \{x : 2^{n-1} < |f(x)| \leq 2^n\}.$$

Osoita, että f on integroituva jos ja vain jos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n m(A_n) < \infty.$$

5. Määritä

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}} dx$$

ja perustelee väitteesi.