Lebesguen mitta- ja integraaliteoria, 18.4.2011

1. (*a*) Määrittele Lebesguen n-ulotteinen ulkomitta m_n^*. Osoita, että numeroituva joukko on aina nollamittainen.

(*b*) Määrittele mitallinen joukko ja mitallinen funktio.

(*c*) Osoita, että jos joukon E ulkomitta on nolla, niin se on mitallinen.

2. (*a*) Esitä Lebesguen monotonisen konvergenssin lause.

(*b*) Todista Fatoun lemma käyttämällä apuna monotonisen konvergenssin lausetta ja anna esimerkki tilanteesta jossa siinä vallitsee aito epäyhtälö.

3. Määritellään $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ asettamalla $f(1) = \infty$ ja

$$f(x) = n, \ \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}} \le x < \frac{2^n - 1}{2^n}, \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Osoita, että f on mitallinen ja määritä $\int_0^1 f(x)\,dx$.

4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mitallinen funktio, ja asetetaan

$$A_n = \{x : 2^{n-1} < |f(x)| \le 2^n\}.$$

Osoita, että f on integroituva jos ja vain jos

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n\, m(A_n) < \infty.$$

5. Määritä

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{x^2\, e^{nx}}{1+e^{nx}}\,dx$$

ja perustele väitteesi.