**Lineaarialgebra 1**

Tentti 17.10.2011

Koeaika on neljä tuntia.

1. Miten yhtälöryhmän

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_2 + 3(a-b)x_4 = 3b^2 - 9b + 7 \\ 4x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + (a-b)x_4 = b^2 - 3b \end{cases}$$

ratkaisujen lukumäärä riippuu vakioista $a, b \in \mathbb{R}$?

2. a) Laske $ABC$, kun

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

b) Osoita, että yhtälö $(A^T)^T = A$ pätee kaikille matriiseille $A$.

3. Olkoon

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 1.$$

Laske

$$\det \begin{bmatrix} b & 2-a & 2 & 0 \\ d & -c & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ -b & a-2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Osoita, että

$$H = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \text{ja } -x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0\}$$

on $\mathbb{R}^4$:n aliavaruus ja laske $\dim H$.

5. Olkoot $S \subset T \subset \mathbb{R}^n$ äärellisiä joukkoja.
a) Osoita, että $\langle S \rangle \subset \langle T \rangle$.
b) Osoita, että $S$ on lineaarisesti riippumaton, jos $T$ on lineaarisesti riippumaton.