Lineaarialgebra 2

Tentti 8.8.2011

Koeaika on neljä tuntia.

1. a) Olkoot V vektoriavaruus ja $v \in V$. Osoita vektoriavaruuden aksioomia käyttäen, että $-(-v) = v$.
b) Olkoon $\mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kaikkien reaalisten polynomien muodostama vektoriavaruus. Onko $A = \{f \in \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f\text{:n aste on } 3\}$ avaruuden $\mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aliavaruus?

2. Olkoon $V = \langle(1,1,1,1),(1,1,1,0),(1,1,0,0),(1,0,0,0)\rangle \subset \mathbb{R}^4$. Etsi V:lle ortonormaali kanta ja laske $\dim V$.

3. Olkoot $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $L(x,y) = (x+y, x-y, 2x+y, x-2y)$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sekä

$$K_1 = \{(1,1),(1,2)\} \text{ ja}$$
$$K_2 = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}.$$

Määritä $\mathrm{Mat}(L; K_1, K_2)$.

4. a) Määrittele lineaarikuvauksen adjungaatti.
b) Määritellään kaikilla $p, q \in \mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$(p \mid q) = \sum_{k=-1}^{1} p(k)q(k).$$

Osoita, että näin saadaan sisätulo avaruuteen $\mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

5. Määritellään $L : \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kaavalla

$$L(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \text{ kaikilla } p \in \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Osoita, että L on lineaarinen. Määritä L:n ominaisarvot ja ominaisavaruudet.