Lineaarialgebra 2

Tentti 5.11.2012

Koeaika on neljä tuntia.

1. a) Olkoot V vektoriavaruus ja $u, v \in V$. Osoita vektoriavaruuden aksioomia käyttäen, että $-(u+v) = -u + (-v)$.
b) Olkoot $(V, (\cdot \mid \cdot))$ sisätuloavaruus ja $A \subset V$ epätyhjä joukko. Määritellään joukon A ortogonaalinen komplementti $A^\perp$ asettamalla

$$A^\perp = \{v \in V \mid (v \mid a) = 0 \text{ kaikilla } a \in A\}.$$

Osoita, että $A^\perp$ on V:n aliavaruus.

2. Sanotaan, että reaalinen $n \times n$-neliömatriisi C on positiividefiniitti, jos

$$(x \mid Cx) > 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

missä $(\cdot \mid \cdot)$ on $\mathbb{R}^n$:n tavallinen sisätulo ja x tulkitaan pystyvektoriksi eli $n \times 1$-matriisiksi. Reaalinen neliömatriisi C on symmetrinen, jos $C^T = C$. Olkoon C positiividefiniitti ja symmetrinen. Osoita, että lauseke

$$< x \mid y >= x^T C y \text{ kaikilla } x, y \in \mathbb{R}^n$$

määrittelee sisätulon $\mathbb{R}^n$:ssä.

3. Olkoon $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, missä

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4, x_2 + x_4)$$

kaikilla $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Osoita, että L on lineaarinen. Onko L injektio, surjektio tai bijektio?

4. Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $L(x, y, z) = (x+y+z, 2y+3z)$ kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Varustetaan $\mathbb{R}^3$ ja $\mathbb{R}^2$ kannoilla $K_1 = \{(1,0,1), (1,1,0), (0,1,1)\}$ ja $K_2 = \{(1,1), (2,1)\}$. Määritä $\mathrm{Mat}(L; K_1, K_2)$.

5. a) Määrittele lineaarikuvauksen ominaisarvo.
b) Olkoot V äärellisulotteinen sisätuloavaruus ja $L : V \to V$ itseadjungoitu lineaarikuvaus. Osoita, että L:n eri ominaisarvoihin liittyvät ominaisvektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.