Lineaarialgebra 2

Tentti 7.11.2011

Koeaika on neljä tuntia.

1. a) Olkoon V vektoriavaruus. Osoita vektoriavaruuden aksioomia käyttäen, että nollavektori on yksikäsitteinen.
b) Onko

$$V = \{A \in \mathrm{Mat}(2,2) \mid \det A = 0\}$$

vektoriavaruuden $\mathrm{Mat}(2,2)$ aliavaruus, missä $\mathrm{Mat}(2,2)$ on kaikkien reaalisten 2×2-matriisien joukko.

2. Olkoon

$$V = \langle (1,1,1,1,0), (1,2,1,2,0), (1,-1,1,-1,0), (0,0,0,0,0) \rangle \subset \mathbb{R}^5.$$

Etsi V:lle ortonormaali kanta ja laske $\dim V$.

3. Olkoon $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$ lineaarikuvaus, missä

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5, x_2 - x_4)$$

kaikilla $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$, ja olkoot
$K_1 = \{(1,0,1,0,0), (1,1,0,0,0), (0,1,1,0,0), (0,0,0,1,1), (0,0,0,1,-1)\}$
ja $K_2 = \{(1,1), (1,2)\}$. Määritä $\mathrm{Mat}(L; K_1, K_2)$.

4. Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$L(x,y,z) = (2x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y - \tfrac{1}{\sqrt{2}}z, \tfrac{5}{2}y + \tfrac{1}{2}z, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{5}{2}z)$$

kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Etsi lineaarikuvauksen L ominaisarvot ja ominaisavaruudet.

5. Määritellään $L : \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ kaavalla

$$L(p) = \int_0^1 p(x)\,dx \text{ kaikilla } p \in \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Osoita, että L on lineaarinen. Määritä L:n ominaisarvot ja ominaisavaruudet.