Lineaarialgebra 2

Tentti 13.2.2012

Koeaika on neljä tuntia.

1. a) Olkoon $V = \mathbb{R}^3$ varustettuna tavallisella yhteenlaskulla. Määritellään reaaliluvulla kertominen seuraavasti:

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\lambda^2 x_1, \lambda^2 x_2, \lambda^2 x_3) \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \text{ ja } \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Onko V vektoriavaruus?

b) Olkoot $(V, (\cdot \mid \cdot))$ sisätuloavaruus ja $A \subset V$ epätyhjä joukko. Määritellään joukon A ortogonaalinen komplementti $A^\perp$ asettamalla

$$A^\perp = \{v \in V \mid (v \mid a) = 0 \text{ kaikilla } a \in A\}.$$

Osoita, että $A^\perp$ on V:n aliavaruus.

2. Olkoon $V = \langle (1,1,1,1), (1,1,1,0), (1,1,0,0), (1,0,0,0) \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Etsi V:lle ortonormaali kanta ja laske $\dim V$.

3. Olkoot $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $L(x,y) = (x+y, x-y, 2x+y, x-2y)$ kaikilla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sekä

$$K_1 = \{(1,1), (1,2)\} \text{ ja}$$
$$K_2 = \{(1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0), (1,1,1,1)\}.$$

Määritä $\mathrm{Mat}(L; K_1, K_2)$.

4. a) Määrittele lineaarikuvaus.

b) Olkoon $L : V \to V$ lineaarinen bijektio. Osoita, että jos λ on L:n ominaisarvo, niin λ^{-1} on L^{-1}:n ominaisarvo.

5. Etsi lineaarikuvauksen $T : \mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ominaisarvot ja ominaisavaruudet, kun

$$T(1) = 3 + x^2, \quad T(x) = 1 + 2x - 3x^2 \quad \text{ja} \quad T(x^2) = -1 + 5x^2.$$

Tässä $\mathcal{P}\mathrm{ol}_2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on reaalisten korkeintaan astetta kaksi olevien polynomien muodostama vektoriavaruus.