Lineaarialgebra 2

Loppukoe 14.5.2012

1. Olkoon V vektoriavaruus.

(a) Määrittele vektoreiden $v_1, \dots, v_n \in V$ lineaarinen riippumattomuus.

(b) Määrittele avaruuden V aliavaruus.

(c) Onko joukko $\{(1,0,1), (0,1,-1), (1,-1,0)\}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta?

2. Olkoon $(V, (\cdot \mid \cdot))$ sisätuloavaruus.

(a) Määrittele avaruuden V ortonormaali osajoukko.

(b) Olkoon $\{v_1, \dots, v_n\}$ avaruuden V ortonormaali kanta. Osoita, että

$$v = \sum_{k=1}^{n} (v \mid v_k) v_k$$

kaikilla $v \in V$.

(c) Osoita, että $K = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0,1,0)\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta. Määrää vektorin $x = (1,-2,3)$ koordinaatit tässä kannassa.

3. Olkoot $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z) = (x+y-z, x-y-z, -x-y-z)$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, ja $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ identiteettikuvaus. Olkoot S avaruuden $\mathbb{R}^3$ luonnollinen kanta ja $K = \{(1,0,0), (1,1,0), (0,1,1)\}$. Määrää matriisit $\mathrm{Mat}(L; S, S)$, $\mathrm{Mat}(I; S, K)$, $\mathrm{Mat}(I; K, S)$ ja $\mathrm{Mat}(L; K, K)$.

4. Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z) = (x-y+z, -x+y-z, x-y+z)$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Määrää kuvauksen L ominaisarvot ja vastaavien ominaisavaruuksien dimensiot.

5. Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(x,y,z) = (x-y-z, -x+y+z, -x+y+z)$ kaikilla $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että L on itseadjungoitu ja etsi avaruudelle $\mathbb{R}^3$ ortonormaali kanta, joka koostuu kuvauksen L ominaisvektoreista.