Lineaarialgebra 2

Tentti 23.5.2011

Koeaika on neljä tuntia.

1. a) Olkoot V vektoriavaruus ja $u, v \in V$. Osoita vektoriavaruuden aksioomia käyttäen, että $-(u+v) = -u + (-v)$.
b) Olkoot $(V, (\cdot \mid \cdot))$ sisätuloavaruus ja $A \subset V$ epätyhjä joukko. Määritellään joukon A ortogonaalinen komplementti $A^{\perp}$ asettamalla

$$A^{\perp} = \{v \in V \mid (v \mid a) = 0 \text{ kaikilla } a \in A\}.$$

Osoita, että $A^{\perp}$ on V:n aliavaruus.

2. Olkoon $V = \langle (2,1,2,2), (1,1,1,1), (1,-1,1,-1) \rangle \subset \mathbb{R}^4$. Etsi V:lle ortonormaali kanta ja laske $\dim V$.

3. Olkoon $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^2$, missä

$$L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5, x_2 - x_4)$$

kaikilla $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$. Olkoot

$$K_1 = \{(1,0,1,0,0), (1,1,0,0,0), (0,1,1,0,0), (0,0,0,1,1), (0,0,0,1,-1)\}$$

kanta $\mathbb{R}^5$:ssa ja $K_2 = \{(1,1), (1,2)\}$ kanta $\mathbb{R}^2$:ssa. Määritä $\mathrm{Mat}(L; K_1, K_2)$.

4. Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$L(x, y, z) = (2x + \tfrac{1}{\sqrt{2}}y - \tfrac{1}{\sqrt{2}}z, \tfrac{5}{2}y + \tfrac{1}{2}z, \tfrac{1}{2}y + \tfrac{5}{2}z)$$

kaikilla $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Etsi lineaarikuvauksen L ominaisarvot ja ominaisavaruudet.

5. Määritellään $L : \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kaavalla $L(p) = p' + p(0)$ kaikilla $p \in \mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Tässä $\mathcal{P}\mathrm{ol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on reaalisten polynomien joukko ja p' on p:n derivaatta. Osoita, että L on lineaarinen sekä määritä L:n ydin $\mathcal{N}(L)$ ja arvojoukko $\mathcal{R}(L)$.