LINEAARIALGEBRA III, SYKSY 2009

Loppukoe 18.01.2010 14–18 L1

Perustele vastauksesi ja käytä matemaattisia symboleja tarkasti kuten Katznelsonin oppikirjassa!

1. Anna tarkat määritelmät alla esiintyville käsitteille. Ilmoita myös tarvittaessa kaikki oletukset/viitekehys (kuten kaksi vektoriavaruutta ja niiden välinen operaattori, sisätuloavaruus jne.), joissa käsitteet ovat järkeviä.

(i) Olkoon $A \subset \mathcal{V}$ ja $\mathcal{V}$ vektoriavaruus. Määrittele $\mathsf{span}[A]$ ja A:n vapaus (linear independence).

(ii) Määrittele vektoriavaruuden kanta (basis) ja dimensio.

(iii) Mitä tarkoitetaan kahden vektoriavaruuden isomorfialla? Anna esimerkkejä tällaisista vektoriavaruuksista.

(iv) Määrittele operaattorin ominaisarvo, spektri, ominaisavaruus ja ominaisvektori.

(v) Mitä on T-invariantti aliavaruus? Anna esimerkkejä tällaisesta aliavaruudesta.

(vi) Mitä on itseadjungoidun operaattorin T määräämä sisätuloavaruuden spektraalihajotelma ja mitä on vastaava T:n spektraalihajotelma? (6p)

2. Olkoon $\mathcal{V}$ äärellisulotteinen vektoriavaruus ja olkoot $S, T \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$. Osoita, että operaattoreiden TS ja S asteet toteuttavat yhtälön

$$\rho(TS) = \rho(S) - \dim(S\mathcal{V} \cap \ker(T)).$$

(6p)

3. Olkoon ϕ äärellisulotteisella sisätuloavaruudella $\mathcal{H}$ määritelty lineaarinen funktionaali. Osoita, että on olemassa sellainen vektori $u \in \mathcal{H}$, että $\phi(v) = \langle v, u \rangle$ kaikilla $v \in \mathcal{H}$. Onko vektori u yksikäsitteinen? Jos on, todista tämä, jos ei, anna vastaesimerkki. (6p)

4. Olkoon $\mathcal{H}$ sisätuloavaruus ja olkoon P idempotentti operaattori $\mathcal{H}$:ssa, ts., $P = P^2$. Osoita, että $P = P^* \iff \|Pv\| \leqslant \|v\| \ \forall v \in \mathcal{H}$. (6p)