**Lukuteoria**

1. välikoe 16.3.2007, Prof. Keijo Väänänen

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Osoita, että polynomi $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x + 9$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$. Olkoon $\Theta$ yhtälön $p(\Theta) = 0$ juuri. Millainen on kunnan $\mathbb{Q}(\Theta)$ luvun kanoninen esitys? Määritä tällainen esitys luvulle $\beta = \frac{\Theta^5+1}{\Theta}$.

2. Todista lause: Jos $\alpha$ on algebrallinen luku, niin on olemassa sellainen luonnollinen luku $c > 0$, että $c\alpha$ on kokonainen algebrallinen luku. Määritä pienin tämän ehdon toteuttava luku $c$, kun $\alpha = \frac{1+3\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

3. Ratkaise A tai B
   A. Olkoon $b \geq 2$ luonnollinen luku. Miten reaaliluvun $\gamma > 0$ $b$-kantainen esitys muodostetaan? Esitä ja perustele välttämätön ja riittävä ehto sille, että tämä esitys on päättyvä.

   B. Kuinka reaaliluvun $\alpha$ ketjumurtokehitelmä muodostetaan ja mitkä ovat sen konvergentit $\dfrac{p_n}{q_n}$ $(n = 1, 2, ...)$. Osoita, että

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^2}\ ,\ n = 1, 2, \ldots .$$

   Määritä luvun $2+\sqrt{7}$ ketjumurtokehitelmä ja kolmas konvergentti.

4. Olkoon $K$ algebrallinen lukukunta ja $\alpha \in K$. Määrittele luvun $\alpha$ minimipolynomi, kuntapolynomi, liittoluvut ja liittoluvut kunnan $K$ suhteen. Osoita, että kuntapolynomi $f_\alpha(x)$ on minimipolynomin $p_\alpha(x)$ potenssi. Olkoon $K = \mathbb{Q}(\Theta)$, missä $\Theta$ on kuten tehtävässä 1. Määritä luvun $\alpha = 2\Theta + 2$ minimipolynomi ja kuntapolynomi sekä normi $N_K(\alpha)$.