LUKUTEORIA

Välikoe 2 9.5.2007

1. Olkoon K algebrallinen lukukunta. Oletetaan, että $\alpha \in O_K$ ja sen normin itseisarvo $|N(\alpha)|$ $(N = N_K)$ on rationaalinen alkuluku. Osoita, että α on jaoton O_K:ssa. Olkoon $F = \mathbf{Q}(i)$. Onko O_F:n alkio $1+i$ tai $3-7i$ jaoton? Onko $(3+i)(3-i) = 2 \cdot 5$ esimerkki ei-yksikäsitteisesti tekijöihinjaosta renkaassa O_F?

2. Oletetaan tunnetuksi, että lukukunnan K kokonaislukujen rengas O_K on t.j.-alue. Tiedetään lisäksi, että Eukleideen alue on pääideaalialue ja että kunnan $F = \mathbf{Q}(\sqrt{3})$ kokonaislukujen rengas O_F on Eukleideen alue. Osoita, että O_F on y.t.j.-alue.

3. Esitä ja todista algebrallisen luvun rationaalisia approksimaatioita koskeva Liouvillen lause. Osoita siihen nojautuen, että $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{-n!}$ on transkendenttinen.

4. Määrittele K neliökunnan kokonaislukujen renkaan O_K ideaalin $\mathcal{A}$ kanoninen kanta, diskriminantti $d(\mathcal{A})$ ja normi $N(\mathcal{A})$. Osoita, että $d(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A})^2 d$, missä d on K:n diskriminantti ja $\mathcal{A} \neq < 0 >$.