Lukuteoria

2. välikoe 12.5.2005

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Määrittele algebrallisen lukukunnan K kokonaislukujen renkaan O_K yksiköt ja jaottomat alkiot. Osoita seuraavat tulokset:
   (i) ε on yksikkö jos ja vain jos $N(\varepsilon) = \pm 1$;
   (ii) Jos $|N(\alpha)|$ on rationaalinen alkuluku, niin α on jaoton.
   Anna esimerkit kunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ yksiköstä ja jaottomasta alkiosta.

2. Määrittele Eukleideen alue ja osoita, että tällainen alue on pääideaalialue. Tunnetusti kunnan $K = \mathbb{Q}(i)$ kokonaislukujen rengas on Eukleideen alue, joten sen ideaalit ovat pääideaaleja. Esitä ideaali $\langle 3+i,\ 1-i \rangle$ pääideaalina.

3. Ratkaise A tai B.
   A) Esitä ja todista algebrallisten lukujen rationaalisia approksimaatioita koskeva Liouvillen lause.

   B) Esitä (ilman todistusta) algebrallisten lukujen rationaalisia approksimaatioita koskeva Liouvillen lause ja osoita siihen nojautuen, että luku
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n!}}$$
   on transkendenttinen.

4. Olkoon K neliökunta. Määrittele K:n kokonaislukujen renkaan O_K ideaalin $\mathcal{A}$ kanta, kanoninen kanta $\{v, s+tw\}$ ja diskriminantti $d(\mathcal{A})$. Osoita, että $d(\mathcal{A}) = (vt)^2 d$, missä d on kunnan K diskriminantti. Esitä kunnan $K = \mathbb{Q}(i)$ kokonaislukujen renkaan ideaali $\langle 5 \rangle$ alkuideaalien tulona ja laske näiden alkuideaalien diskriminantit.