Lukuteoria

Kesätentti 15.6.2009

1. Olkoon α irrationaaliluku. Osoita, että epäyhtälöllä
   $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$
   on äärettömän monta rationaalista ratkaisua $\frac{p}{q}$.

   (Jos käytät todistuksessa konvergentteja, osoita, että niillä on kyseinen ominaisuus.)

2. a) Määrittele lukukunnan K yksiköt ja osoita, että $\alpha \in \mathcal{O}_K$ on yksikkö jos ja vain jos $N_K(\alpha) = \pm 1$. Mitkä ovat kunnan $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ yksiköt ?

   b) Määrittele Eukleideen kunta ja osoita, että $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ on tälläinen kunta.

3. Suorita A) tai B)

   A)
   a) Olkoon $m \in \mathbb{Z}$ neliövapaa ehdon $m \equiv 2$ tai $3 \pmod 4$ toteuttava kokonaisluku. Osoita, että neliökunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ luku $\alpha = a + b\sqrt{m},\ a, b \in \mathbb{Q}$, on kokonainen algebrallinen luku täsmälleen silloin, kun $a, b \in \mathbb{Z}$.

   b) Osoita, että yhtälön $x^2 = 37 + 12\sqrt{7}$ juuret ovat kunnassa $\mathbb{Q}(\sqrt{7})$. Ovatko juuret tämän kunnan kokonaislukuja?

   B)
   Olkoon $p > 2$ alkuluku. Olkoon ρ polynomin $x^p - 1$ nollakohta $\rho = e^{2\pi i/p}$.
   Todista tulokset:

   a) ρ on astetta $p - 1$ oleva kokonainen algebrallinen luku,

   b) kunnat $\mathbb{Q}(\rho), \mathbb{Q}(\rho^2), \cdots, \mathbb{Q}(\rho^{p-1})$ ovat samat,

   c) $N(\rho) = 1$ ja $N(1 - \rho) = p$.

4. Ratkaise <u>yksi</u> tehtävistä A, B tai C.

   A. Määrittele neliökunnan kokonaislukujen renkaan ideaalin $\mathcal{A} \neq < 0 >$ kanoninen kanta $\{v, s + tw\}$ ja normi $N(\mathcal{A})$. Osoita, että $N(\mathcal{A}) = vt$. Määritä ideaalin $< 1 - 2i > \subset O_K,\ K = \mathbb{Q}(i)$, kanoninen kanta.

   B. Osoita, että neliökunnan kokonaislukujen renkaan ideaaleille pätee:

$$\mathcal{A} | \mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{A}.$$

KÄÄNNÄ

C. Määritä seuraavien ideaalien kanoniset kannat:

a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, $\quad < 3, 1 + 2\sqrt{-5} >$,

b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10})$, $\quad < 6, 7 + 2\sqrt{10} >$.

5. a) Tiedetään, että Neperin luku e on transkendenttinen. Voiko $\sqrt[3]{e} + 2e$ olla algebrallinen? Perustele vastaus!

b) Esitä (ilman todistusta) algebrallisten lukujen approksimointia koskeva Liouvillen lause ja osoita siihen nojautuen, että luku

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n!}}$$

on transkendenttinen.