Lukuteoria

Kesätentti 19.6.2006

1. Olkoon α irrationaaliluku. Osoita, että epäyhtälöllä

   $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$

   on äärettömän monta rationaalista ratkaisua $\frac{p}{q}$.

   (Jos käytät todistuksessa konvergentteja, osoita, että niillä on kyseinen ominaisuus.)

2. Olkoon $K = \mathbb{Q}(\theta)$ astetta n oleva algebrallinen lukukunta. Määrittele luvun $\alpha \in K$ minimipolynomi p_α ja kuntapolynomi f_α. Osoita, että f_α on p_α:n potenssi. Osoita lisäksi, että $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ jos ja vain jos $f_\alpha = p_\alpha$.

3. Esitä ja todista tulos, josta käy ilmi, mitä muotoa neliökunnan $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ kokonaisluvut ovat. Osoita tähän tulokseen nojautuen, että luvut

   $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

   ovat luonnollisia lukuja.

4. a) Olkoon K algebrallinen lukukunta. Osoita, että K:n kokonaislukujen rengas $\mathcal{O}_K$ on t.j.-alue (tekijöihinjakoalue). Osoita edelleen käyttämällä kunta $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, että tämä tekijöihinjako ei ole välttämättä yksikäsitteinen.

   b) Olkoot $\mathfrak{p} = \langle 2, 1-\sqrt{-5}\rangle$ ja $\mathfrak{q} = \langle 3, 1+\sqrt{-5}\rangle$ kunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ kokonaislukujen renkaan ideaaleja. Määritä näiden ideaalien normit. Ovatko ideaalit alkuideaaleja?

5. a) Osoita, että luku

   $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2^n}$

   on irrationaalinen.

   b) Esitä (ilman todistusta) algebrallisten lukujen approksimointia koskeva Liouvillen lause ja osoita siihen nojautuen, että luku

   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n!}}$

   on transkendenttinen.