

Lukuteoria

Loppukoe 3.10.2005

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Kuinka reaalityön α ketjumurtokehitemä muodostetaan ja mitkä ovat sen konvergentit $\frac{p_n}{q_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). Osoita, että

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Määritä luvun $2 + \sqrt{7}$ ketjumurtokehitemä ja kolmas konvergentti.

2. a) Olkoon $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, missä α on yhtälön $x^3 + 2x + 6 = 0$ juuri. Määrittele luvun $\beta \in K$ normi $N_K(\beta)$ ja jälki $T_K(\beta)$. Määritä $N_K(3\alpha - 2)$ ja $T_K(3\alpha - 2)$.
- b) Olkoon α yhtälön $2x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$ ei-rationaalinen juuri. Onko luku $\alpha^2 + \frac{1}{2}$ kunnan $\mathbb{Q}(\alpha)$ kokonaisluku? Perusteltu vastaus!

3. Oletetaan tunnetuksi, että kunta $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ on Eukleideen kunta. Osoita, että Diofantoksen yhtälön $x^3 = y^2 + 2$ ainoat ratkaisut ovat $x = 3, y = \pm 5$.

4. a) Määrittele Eukleideen alue ja osoita, että neliökunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ kokonaislukujen rengas on Eukleideen alue.
- b) Tunnetusti Eukleideen alue on pääideaalialue. Esitä a) kohdan kokonaislukujen renkaan ideaalit

$$a_1 = \langle 6, 3 + \sqrt{3} \rangle, a_2 = \langle 2, 3 + 3\sqrt{3} \rangle$$

pääideaaleina ja määritä niiden normit.

5. Osoita, että e ja π ovat irrationaalilukuja.