**Lukuteoria**

Loppukoe 12.1.2009

EI LASKIMIA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Olkoon $b \geq 2$ luonnollinen luku. Miten reaaliluvun $\gamma > 0$ $b-$kantainen esitys muodostetaan? Esitä ja todista välttämätön ja riittävä ehto sille, että tämä esitys on joko päättyvä tai jaksollinen. Osoita, että luku

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-2^n}$$

on irrationaalinen.

2. Olkoon $p > 2$ alkuluku. Osoita, että polynomi $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ on jaoton renkaassa $\mathbb{Q}[x]$. Oletetaan, että $\rho$ toteuttaa yhtälön $f(\rho) = 0$. Määritä luvun $\alpha = \rho + 2$ minimipolynomi. Onko luku $\rho + \rho^{-1}$ kokonainen algebrallinen luku?

3. Määrittele algebrallisen lukukunnan $K$ kokonaislukujen renkaan $O_K$ yksiköt ja jaottomat alkiot. Osoita seuraavat tulokset:
(i) $\varepsilon$ on yksikkö jos ja vain jos $N(\varepsilon) = \pm 1$;
(ii) Jos $|N(\alpha)|$ on rationaalinen alkuluku, niin $\alpha$ on jaoton.
Anna esimerkit kunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ yksiköstä ja jaottomasta alkiosta.

4. a) Määrittele Eukleideen alue ja osoita, että neliökunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ koko-naislukujen rengas on Eukleideen alue.

   b) Tunnetusti Eukleideen alue on pääideaalialue. Esitä a) kohdan kokonaislukujen renkaan ideaalit
   $$a_1 = \langle 6, 3 + \sqrt{3} \rangle, a_2 = \langle 2, 3 + 3\sqrt{3} \rangle$$
   pääideaaleina ja määritä niiden normit.

5. Ratkaise yksi tehtävistä A, B tai C.

   A. Määrittele neliökunnan kokonaislukujen renkaan ideaalin $\mathcal{A} \neq < 0 >$ kanoninen kanta $\{v, s + tw\}$ ja normi $N(\mathcal{A})$. Osoita, että $N(\mathcal{A}) = vt$. Määritä ideaalin $< 1 - 2i > \subset O_K,\ K = \mathbb{Q}(i)$, kanoninen kanta.

   B. Osoita, että neliökunnan kokonaislukujen renkaan ideaaleille pätee:
   $$\mathcal{A}|\mathcal{C} \Leftrightarrow \mathcal{C} \subset \mathcal{A}.$$

   C. Määritä seuraavien ideaalien kanoniset kannat:

   a) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5}),\quad < 3, 1 + 2\sqrt{-5} >,$

   b) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10}),\quad < 6, 7 + 2\sqrt{10} >.$