Lukuteoria

Loppukoe 13.2.2006

1. Olkoon $b \geq 2$ luonnollinen luku. Miten positiivisen reaaliluvun α b-kantainen esitys muodostetaan? Osoita, että jaksollinen b-kantainen esitys on rationaaliluku. Osoita edelleen, että b-kantainen esitys on päättyvä, jos $\alpha = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, $\mathrm{syt}(r, s) = 1$ ja jokainen s:n alkulukutekijä on myös b:n tekijä. Minkä rationaaliluvun esitys on $(0, \overline{26})_8$?

2. a) Määrittele kokonainen algebrallinen luku. Olkoon α yhtälön $x^2 - 28 = 0$ juuri. Mitkä ovat kunnan $\mathbb{Q}(\alpha)$ kokonaisluvut? Perustele vastauksesi.

   b) Määrittele Eukleideen kunta ja osoita, että a)-kohdan kunta $\mathbb{Q}(\alpha)$ on tälläinen kunta.

3. Oletetaan tunnetuksi, että kunta $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ on Eukleideen kunta. Osoita, että Diofantoksen yhtälön $x^3 = y^2 + 2$ ainoat ratkaisut ovat $x = 3, y = \pm 5$.

4. Määrittele neliökunnan K kokonaislukujen renkaan $\mathcal{O}$ ideaalin $\mathcal{A}$ kanoninen kanta, diskriminantti $d(\mathcal{A})$ ja normi $N(\mathcal{A})$. Osoita, että $d(\mathcal{A}) = N(\mathcal{A})^2 d$, missä d on kunnan K diskriminantti ja $\mathcal{A} \neq < 0 >$.

5. a) Tiedetään, että Neperin luku e on transkendenttinen. Voiko $\sqrt[3]{e} + 2e$ olla algebrallinen? Perustele vastaus!

   b) Esitä (ilman todistusta) algebrallisten lukujen approksimointia koskeva Liouvillen lause ja osoita siihen nojautuen, että luku

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n!}}$$

   on transkendenttinen.